詳細解答

STEP I 1997，第 8 題

純數學 • 指數方程的根

> **STEP I 1997，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q8

關鍵思路

方程 $x = a^x$ 的根必定是正數，因為 $a^x > 0$。因此我們可以取對數（logarithm），把問題轉化為研究 $f(x) = \ln x - x \ln a$ 在 $x > 0$ 上的零點（zero）。當 $a > 1$ 時，這個函數先升後降，所以只有在其極大值（maximum）不小於 0 時才有零點。當 $0 < a < 1$ 時，它嚴格遞增（strictly increasing），所以最多只能穿過零一次，問題就在於它究竟有沒有穿過。

解答

化為 $f(x) = 0$

全題中 $a > 0$，所以 $a^x = e^{x \ln a}$ 對所有實數 x 都有定義，而且是正數。若 $x \leq 0$，則 $a^x > 0 \geq x$，所以沒有滿足 $x \leq 0$ 的根。當 $x > 0$ 時，兩邊都是正數，而 ln 嚴格遞增，故

$$x = a^x \iff \ln x = x \ln a \iff f(x) = 0, \qquad \text{其中} f(x) = \ln x - x \ln a.$$

所以 $x = a^x$ 的實根正好就是 f 在 $(0, \infty)$ 上的零點。

當 $a > e^{1/e}$ 時沒有根

這時 $a > e^{1/e} > 1$，所以 $\ln a > 0$。求導數（derivative），得

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \ln a,$$

它在 $0 < x < 1/\ln a$ 時為正，在 $x > 1/\ln a$ 時為負。所以 f 先遞增後遞減，它在 $(0,\infty)$ 上的極大值是

$$f\left(\frac{1}{\ln a}\right) = \ln\left(\frac{1}{\ln a}\right) - 1 = -\ln(\ln a) - 1.$$

現在由 $a > e^{1/e}$ 得 $\ln a > 1/e$，再取一次對數（兩邊都是正數），得 $\ln(\ln a) > \ln(1/e) = -1$。因此

$$f(x) \le -\ln(\ln a) - 1 < 0 \quad \text{對所有} x > 0.$$

所以 f 永不為零，方程 $x = a^x$ 沒有實根，這正是所要證明的。

想一想 當 $a = e^{1/e}$ 時，以及當 $1 < a < e^{1/e}$ 時，情況究竟如何？

當 $a = e^{1/e}$ 時，極大值剛好是 0，在 $x = 1/\ln a = e$ 處取得，所以有一個（重）根 $x = e$：直線 $y = x$ 與 $y = a^x$ 在 (e,e) 相切（tangent）。當 $1 < a < e^{1/e}$ 時，極大值為正，而在兩端都有 $f \to -\infty$，所以有兩個根。（當 $a = 1$ 時，唯一的根是 $x = 1$。）題目並沒有要求討論這些情況，但它們說明 $e^{1/e}$ 正好就是分界點。

當 $0 < a < 1$ 時恰有一個根

現在 $\ln a < 0$，所以

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \ln a = \frac{1}{x} + |\ln a| > 0 \quad \text{對所有} x > 0,$$

故 f 在 $(0,\infty)$ 上嚴格遞增。因此 f 最多只有一個零點。

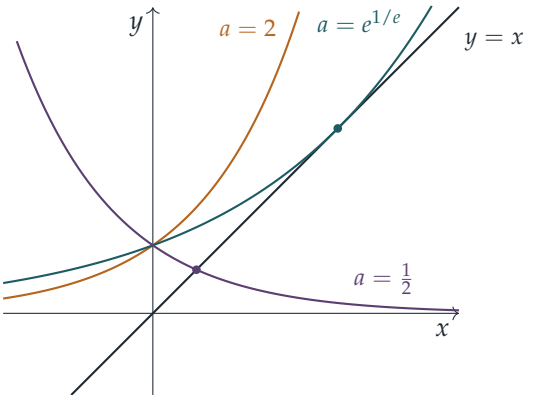
要說明它確實有一個零點，注意 f 在 $(0,\infty)$ 上連續（continuous），而且

$$f(1) = -\ln a > 0, \qquad f(a) = \ln a - a\ln a = (1-a)\ln a < 0,$$

兩式都用到 $0 < a < 1$。根據介值定理（intermediate value theorem），f 在 a 與 1 之間有一個零點。

所以當 $0 < a < 1$ 時，方程 $x = a^x$ **恰有一個**實根，而且它位於區間 $(a,1)$ 之內。

從圖像看便一目了然：$y = a^x$ 遞減而且恆為正，而 $y = x$ 遞增，所以兩個圖像恰好相交一次。（等價地說，$g(x) = a^x - x$ 嚴格遞減，且 $g(0) = 1 > 0$，$g(1) = a - 1 < 0$。）



驗算

- 在分界處，$(e^{1/e})^e = e$，所以當 $a = e^{1/e} \approx 1.4447$ 時，$x = e$ 的確是一個根，與相切的情況吻合。
- 當 $a = \frac{1}{2}$ 時，用二分法（bisection）求得唯一的根 $x \approx 0.6412$，一如所料位於 $(\frac{1}{2}, 1)$ 之內。
- 數值上，隨機選取 200 個 $a > e^{1/e}$，函數 $a^x - x$ 在 $[-20, 20]$ 的細密格點上始終為正；$\ln x - x \ln a$ 的極大值與 $-1 - \ln \ln a$ 吻合；當 a 略小於 $e^{1/e}$ 時有兩個根；而隨機選取 500 個 $a \in (0, 1)$，每次都恰好只有一次變號。

常見錯誤

- 沒有先指出任何根都滿足 $x > 0$ 就取對數：否則 $\ln x$ 沒有定義，所以 $x \leq 0$ 的情況需要另作（一行的）論證。
- 當 $0 < a < 1$ 時只證明 f 遞增。這只證明了最多有一個根；你還需要找到一次變號，才能證明確實有一個根。
- 對 $\ln a > 1/e$ 取 ln 時把不等號的方向弄反；這一步之所以穩妥，是因為 ln 遞增，而且兩邊都是正數。

STEP 之外

當 $0 < a < 1$ 時，那個根是映射 $x \mapsto a^x$ 的不動點（fixed point），而反覆迭代 $x_{n+1} = a^{x_n}$ 就引出「無窮冪塔」（infinite power tower）$a^{a^{a^{\cdots}}}$。歐拉（Euler）證明了這個冪塔恰好在 $e^{-e} \leq a \leq e^{1/e}$ 時收斂（converge），所以同一個分界點 $e^{1/e}$ 再次出現。研究迭代何

時收斂，會引向大學一年級分析學中的壓縮映射定理（contraction mapping theorem）；Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析學入門教材）涵蓋了介值定理及所需的背景知識。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。