詳細解答

STEP I 1997，第 7 題

純數學 • 高斯求積法

> **STEP I 1997，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q7

關鍵思路

等式兩邊對 P 都是線性（linearly）的，所以只要公式對四個基本的三次多項式（cubic）1、t、t^2 和 t^3 成立，它就對所有三次多項式成立。這樣一來，問題便化為含四個未知數的四條方程。這些方程雖然是非線性的，但奇次冪與偶次冪可以乾淨利落地分開，餘下的工作就交給關於 $t = 0$ 的對稱性（symmetry）。

解答

設 $\mathrm{P}(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$。則

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = c_0 \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}t + c_1 \int_{-1}^{1} t\,\mathrm{d}t + c_2 \int_{-1}^{1} t^2\,\mathrm{d}t + c_3 \int_{-1}^{1} t^3\,\mathrm{d}t,$$

而 $a_1\mathrm{P}(u_1) + a_2\mathrm{P}(u_2)$ 也可以用完全相同的方式拆開。因此，公式對所有三次多項式成立，當且僅當它對 $\mathrm{P}(t) = t^k$，$k = 0, 1, 2, 3$ 成立。（「僅當」是因為每個 t^k 本身都是廣義的三次多項式；「當」則只需把各項加起來。）由於 $\int_{-1}^{1} t^k\,\mathrm{d}t$ 在 $k = 0, 1, 2, 3$ 時分別為 2, 0, $\frac{2}{3}$, 0，我們需要

$$a_1 + a_2 = 2, \tag{A}$$

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 = 0, \tag{B}$$

$$a_1 u_1^2 + a_2 u_2^2 = \tfrac{2}{3}, \tag{C}$$

$$a_1 u_1^3 + a_2 u_2^3 = 0. \tag{D}$$

想一想 這些方程是非線性的。有沒有哪一個組合可以因式分解（factorise）？

取 (D) 減去 u_2^2 乘以 (B)：含 a_2 的項互相抵消，得

$$a_1u_1^3 - a_1u_1u_2^2 = a_1u_1(u_1-u_2)(u_1+u_2) = 0.$$

我們逐一排除前三個因式為零的情況。

- 若 $a_1 = 0$：由 (A) 得 $a_2 = 2$，由 (B) 得 $u_2 = 0$，於是 (C) 變成 $0 = \frac{2}{3}$。不可能。
- 若 $u_1 = 0$：由 (B) 得 $a_2u_2 = 0$，所以 $a_2u_2^2 = 0$，(C) 同樣變成 $0 = \frac{2}{3}$。不可能。
- 若 $u_1 = u_2$：兩點重合，(B) 變成 $(a_1+a_2)u_1 = 2u_1 = 0$，所以 $u_1 = u_2 = 0$，(C) 再次不成立。

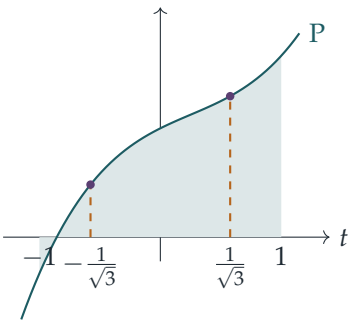
因此 $u_2 = -u_1$，且 $u_1 \neq 0$。這時 (B) 變成 $(a_1-a_2)u_1 = 0$，所以 $a_1 = a_2$，再由 (A) 得 $a_1 = a_2 = 1$。最後由 (C) 得 $2u_1^2 = \frac{2}{3}$，即 $u_1^2 = \frac{1}{3}$；(D) 隨之自動成立。所以

$$\boxed{a_1 = a_2 = 1, \qquad u_1 = -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \quad u_2 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}}$$

（或把 u_1 與 u_2 對調），也就是說，

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{P}\!\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) + \mathrm{P}\!\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{對每一個三次多項式P.}$$

以上論證同時說明，除了重新標記之外，這是唯一的選擇。



無論畫的是哪一個三次多項式，陰影部分的面積都等於兩條虛線高度之和。

驗算

- $\mathrm{P}(t) = t^2$：積分為 $\frac{2}{3}$，而公式給出 $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$。
- $\mathrm{P}(t) = 1 + t + t^2 + t^3$：積分為 $2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$；公式給出 $2 + 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{8}{3}$，因為奇次項互相抵消。
- 這條公式對 t^4 並不準確：它給出 $2\cdot\frac{1}{9} = \frac{2}{9}$，而積分卻是 $\frac{2}{5}$。可見三次多項式確實是極限。
- 數值上，以 10^4 個隨機三次多項式測試，兩邊相差不超過 10^{-14}。

常見錯誤

- 一開始就假設對稱（$u_2 = -u_1$，$a_1 = a_2$）。這樣做可以很快得到正確答案，卻沒有證明其他選擇都行不通；上面的因式分解則做到了這一點。
- 在除以某個量時，忘記考慮 $a_1 = 0$ 或 $u_1 = u_2$ 的情況。
- 只用 $\mathrm{P}(t) = 1$ 和 t^2 來檢驗：迫使對稱性出現的，正是奇次條件 (B) 和 (D)。

STEP 之外

這就是兩點高斯求積法（Gaussian quadrature）。只要適當選取 n 個點和相應的權（weights），就可以準確地求出所有次數不超過 $2n-1$ 的多項式的積分，是 n 個等距點所能做到的兩倍。最佳的點是勒讓德多項式（Legendre polynomials）的零點（這裏是 $\frac{1}{2}(3t^2-1)$，其零點為 $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$），而這些多項式在 $[-1,1]$ 上是正交（orthogonal）的。正交多項式會在大學一年級的數值分析（numerical analysis）和求解微分方程（differential equations）時出現；Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入門教材）在級數解一章中會討論勒讓德方程。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。