詳細解答

STEP I 1997，第 6 題

純數學 • 以積分估計 π 的界限

> **STEP I 1997，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q6

本題在 *Beyond STEP* 第 4.3 節22/7 大於 π 中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch04/twenty-two-sevenths.html

關鍵思路

被積函數（integrand）是一個有理函數（rational function），其分子的次數高於分母，所以第一步是以 x^2+1 作多項式除法（polynomial division）：得出一個多項式商式，積分起來毫不費力，再加上一個常數餘數除以 $1+x^2$，積分後得到反正切（arctangent）。π 正是由這個反正切而來。至於最後的不等式，則利用在 $[0,1]$ 上 $1 \le 1+x^2$，把被積函數與 $x^4(1-x)^4$ 本身作比較。

解答

除法

以二項式定理（binomial theorem）展開，

$$x^4(1-x)^4 = x^4(1-4x+6x^2-4x^3+x^4) = x^8-4x^7+6x^6-4x^5+x^4.$$

我們以 x^2+1 作除式，每次消去首項：

$$\begin{aligned} x^8-4x^7+6x^6-4x^5+x^4 &= x^6(x^2+1)+\left(-4x^7+5x^6-4x^5+x^4\right)\\ -4x^7+5x^6-4x^5+x^4 &= -4x^5(x^2+1)+\left(5x^6+x^4\right)\\ 5x^6+x^4 &= 5x^4(x^2+1)+\left(-4x^4\right)\\ -4x^4 &= -4x^2(x^2+1)+4x^2\\ 4x^2 &= 4(x^2+1)-4. \end{aligned}$$

把 x^2+1 的各個倍數合併，

$$x^4(1-x)^4=\left(x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4\right)(x^2+1)-4,$$

所以

$$a_6=1,\quad a_5=-4,\quad a_4=5,\quad a_3=0,\quad a_2=-4,\quad a_1=0,\quad a_0=4,\quad b=-4.$$

快速驗算一下：當 $x=0$ 時，右方是 $4\cdot1-4=0$；當 $x=1$ 時，右方是 $(1-4+5-4+4)\cdot2-4=0$，兩次都與左方相符。

等於 $\frac{22}{7}-\pi$ 的積分

把恆等式兩邊除以 $1+x^2$（它永不為零），

$$\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}=x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4-\frac{4}{1+x^2}.$$

在 $[0,1]$ 上逐項積分，並利用 $\int\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\arctan x$，

$$\begin{aligned} \int_0^1\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[\tfrac{1}{7}x^7-\tfrac{2}{3}x^6+x^5-\tfrac{4}{3}x^3+4x\right]_0^1-4\Big[\arctan x\Big]_0^1\\ &= \tfrac{1}{7}-\tfrac{2}{3}+1-\tfrac{4}{3}+4\;-\;4\cdot\tfrac{\pi}{4}\\ &= \tfrac{1}{7}+3-\pi\\ &= \frac{22}{7}-\pi, \end{aligned}$$

因為 $-\frac{2}{3}-\frac{4}{3}=-2$ 及 $\arctan1=\frac{\pi}{4}$。這就是所求的結果。

$x^4(1-x)^4$ 的積分

利用開首的展開式，

$$\int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{5}-\tfrac{4}{6}+\tfrac{6}{7}-\tfrac{4}{8}+\tfrac{1}{9}.$$

通分至公分母 $2520=5\cdot7\cdot8\cdot9$，

$$\frac{504-1680+2160-1260+280}{2520}=\frac{4}{2520}=\frac{1}{630}.$$

π 的上下界

設 $f(x) = x^4(1-x)^4$，則當 $0 < x < 1$ 時 $f(x) > 0$。

上界（*upper bound*）。在 $(0,1)$ 上，被積函數 $f(x)/(1+x^2)$ 嚴格為正且連續(continuous)，所以它在 $[0,1]$ 上的積分嚴格為正。因此 $\frac{22}{7} - \pi > 0$，即 $\pi < \frac{22}{7}$。

下界（*lower bound*）。當 $0 < x < 1$ 時，$1 + x^2 > 1$，而由於 $f(x) > 0$，

$$\frac{f(x)}{1+x^2} < f(x).$$

想一想 為甚麼兩個積分之間的不等式是嚴格的，而不僅是 $\leq$？

兩者之差 $f(x) - \dfrac{f(x)}{1+x^2} = \dfrac{x^2 f(x)}{1+x^2}$ 在整個開區間 $(0,1)$ 上連續且嚴格為正，所以它在 $[0,1]$ 上的積分嚴格為正。（一個非負的連續函數，只要在某處為正，其積分便為正。）因此

$$\frac{22}{7} - \pi = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x < \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{630},$$

移項後得 $\pi > \frac{22}{7} - \frac{1}{630}$。結合兩個界，

$$\frac{22}{7} > \pi > \frac{22}{7} - \frac{1}{630},$$

這正是所要證明的。

驗算

- 以數值計算，$\frac{22}{7} - \pi \approx 0.0012645$，而對第一個積分使用辛普森法則（Simpson's rule），所得的值準確至小數點後十二位都相同。
- $\frac{1}{630} \approx 0.0015873$，明顯大於 0.0012645；上下界表示 $3.141270 < \pi < 3.142857$，而事實上 $\pi \approx 3.141593$。
- $\frac{1}{630}$ 這個值亦可由貝塔積分（beta integral）公式 $\int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}x = \dfrac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$ 得出：它給出 $\dfrac{4!\,4!}{9!} = \dfrac{576}{362880} = \dfrac{1}{630}$。

常見錯誤

- 在長除法中漏掉 a_3 和 a_1 這兩個零係數：每一個冪次都要保留在原位，否則餘數便會算錯。
- 寫成 $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 4\ln 2$（與 $\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 混淆）；正確答案是 $4\arctan 1 = \pi$。

- 在最後一步只證明了 $\leq$。題目要求的是嚴格不等式（strict inequality），所以必須說明為何兩個積分不可能相等。

STEP 之外

這個優美的積分在二十世紀才被發現，它一舉說明了課本上的近似值 $\frac{22}{7}$ 高估了 π。同樣的想法——把 $x^n(1-x)^n$ 乘以簡單的函數後積分，再證明結果雖小但為正——正是證明 π 和 e 是無理數（irrational）的經典方法的核心：介乎 0 與 1 之間的整數並不存在。形如 $\int_0^1 x^m(1-x)^n \, \mathrm{d}x$ 的積分是貝塔函數（beta function）的值，在大學一年級的分析和概率課程中便會遇到。至於如何嚴謹地處理積分之間的嚴格不等式，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。