詳細解答

STEP I 1997，第 5 題

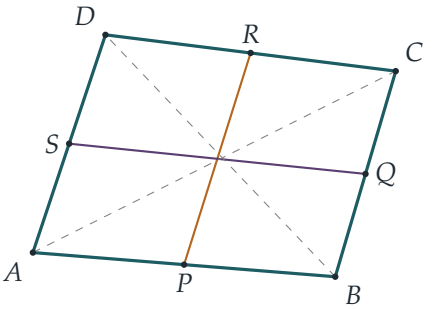
純數學 • 幾何中的向量

> **STEP I 1997，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q5

關鍵思路

長度的平方就是點積（dot product），中點（mid-point）就是平均，所以用位置向量（position vector）便可把整條恆等式化為代數運算。有用的竅門是看出等式兩邊其實都暗藏着對角線（diagonal）AC 和 BD：只要把每個差都用 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ 表示出來，恆等式便水到渠成。至於其後的推論，只需用到四根桿的長度永遠不變這一事實。

解答



設 A, B, C, D 相對於任意原點的位置向量為 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$，並記 $|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$。各中點為

$$\mathbf{p} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}), \quad \mathbf{q} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}), \quad \mathbf{r} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d}), \quad \mathbf{s} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{d}+\mathbf{a}).$$

四條邊

把每一項按 $|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 - 2\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ 展開，平方項 $|\mathbf{a}|^2, \ldots, |\mathbf{d}|^2$ 在兩邊各出現一次，互相抵消，餘下

$$\begin{aligned}|AB|^2 + |CD|^2 - |AD|^2 - |BC|^2 &= -2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - 2\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{d} + 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{d} + 2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\\ &= 2(\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{b}).\end{aligned}$$

（把 $(\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{b})$ 乘開，即可核實這個因式分解。）用文字來說，這就是 $-2\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$。

兩條中點連線

我們有

$$\overrightarrow{PR} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d}-\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{u}, \qquad \overrightarrow{QS} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{d}+\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{v},$$

姑且這樣記。

> ? **想一想** 怎樣才可以求出 $|\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2$，而不必展開兩個四項式的平方？

利用向量的平方差公式（difference of two squares）：$|\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})$，此式成立是因為 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$。這裏

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = 2(\mathbf{d}-\mathbf{b}), \qquad \mathbf{u}-\mathbf{v} = 2(\mathbf{c}-\mathbf{a}),$$

所以

$$|PR|^2 - |QS|^2 = \tfrac{1}{4}(|\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2) = (\mathbf{c}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{b}) = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}.$$

合併結果

把四條邊的結果加上中點連線結果的兩倍，

$$\begin{aligned}&|AB|^2 + |CD|^2 - |AD|^2 - |BC|^2 + 2(|PR|^2 - |QS|^2)\\ &\quad = 2(\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{b}) + 2(\mathbf{c}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{b}) = 0,\end{aligned}$$

移項後得

$$|AB|^2 + |CD|^2 + 2|PR|^2 = |AD|^2 + |BC|^2 + 2|QS|^2,$$

這正是所要證明的。我們從沒有用過凸性（convexity），甚至沒有用過各點共面這一條件，所以恆等式對任意四點都成立，包括摺疊過來、以致其中兩根桿相交的四邊形。

推論

把恆等式移項，

$$|PR|^2 - |QS|^2 = \tfrac{1}{2}(|AD|^2 + |BC|^2 - |AB|^2 - |CD|^2).$$

各桿都是剛性的，所以無論接合處怎樣屈曲，右邊的四個長度永遠不變。因此 $|PR|^2 - |QS|^2$ 在整個運動過程中是常數。換句話說，兩條對角線的純量積（scalar product）$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ 保持不變，儘管對角線本身的長度和方向都在改變。

驗算

- 對於邊長為 a 和 b 的長方形，$|AB| = |CD| = a$ 而 $|AD| = |BC| = b$，而 PR 和 QS 連接對邊的中點，所以 $|PR| = b$ 及 $|QS| = a$。恆等式兩邊都等於 $2a^2 + 2b^2$。
- 對於菱形(rhombus)，四條邊全部相等，所以推論指出在任何位置都有 $|PR| = |QS|$。事實上，菱形的對角線互相垂直，所以 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$。
- 數值上，在 10^5 個隨機四邊形上，恆等式的誤差都在 10^{-12} 之內。對於一個 $|AB| = 3$、$|BC| = 4$、$|CD| = 5$、$|DA| = 6$ 的連桿機構（linkage），屈曲經過約 200 個位置，$|PR|^2 - |QS|^2$ 始終保持在 $\frac{1}{2}(36 + 16 - 9 - 25) = 9$。

常見錯誤

- 搞錯哪些邊與哪條連線配對：PR 連接 AB 和 CD 的中點，而在恆等式中與 PR 放在一起的正是這兩條邊。
- 採用坐標設定，例如把 A 放在原點、B 放在坐標軸上，卻忘記了一般的四邊形需要其餘各點完全自由。用向量便可免去這些繁瑣的處理。

STEP 之外

P, Q, R, S 四點總是構成一個平行四邊形（瓦里尼翁定理，Varignon's theorem），而 PR、QS 就是它的對角線。這裏的恆等式與平行四邊形恆等式（parallelogram law）$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = 2|\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{v}|^2$ 是近親；在大學一年級的線性代數課程中，後者恰好刻劃了那些由內積（inner product）導出的範數（norm）。機構運動時某個量保持不變，這種量稱為不變量（invariant），這個想法在數學中反覆出現。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）是一個好去處，可以看到點積和內積如何得到嚴謹而完整的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。