詳細解答

STEP I 1997，第 4 題

純數學 • 絕對值方程

> **STEP I 1997，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q4

關鍵思路

每個絕對值（modulus）項只會在其內部為零之處改變公式，因此四個「臨界點」（critical points）$x = -1, 0, 1, 2$ 把實數線分成五個區間（interval）。在每個區間上，每個絕對值都可以換成符號確定的普通括號，左邊於是變成線性函數（linear function），方程便容易處理。唯一要留意的是：線性方程的根，必須落在你正在處理的那個區間內才算數。

解答

設 $L(x) = |x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2|$。回想當 $t \geq 0$ 時 $|t| = t$，而當 $t < 0$ 時 $|t| = -t$。我們由右至左逐個區間處理。

$x \geq 2$。　四個絕對值的內部全部非負，所以

$$\begin{aligned} L(x) &= (x+1) - x + 3(x-1) - 2(x-2) \\ &= x + 1 - x + 3x - 3 - 2x + 4 = x + 2. \end{aligned}$$

方程變成 $x + 2 = x + 2$，對每一個 $x \geq 2$ 都成立。所以整個區間 $x \geq 2$ 都是解。

> ? **想一想** 方程變成了恆等式（identity）。我們是否在代數運算上出了錯？

沒有。當 $x \to \infty$ 時，各絕對值中 x 的係數加起來是 $1 - 1 + 3 - 2 = 1$，常數項加起來是 $1 - 0 - 3 + 4 = 2$，恰好與右邊的 $x + 2$ 吻合。含絕對值的方程完全可以有一整個區間的解，而題目說「求所有解」，正是暗示可能會出現這種情況。快速檢驗一下：在 $x = 3$ 時，$L(3) = 4 - 3 + 6 - 2 = 5 = 3 + 2$。

$1 \le x < 2$。　此時 $x-2<0$，所以 $|x-2| = -(x-2)$，而

$$L(x) = (x+1) - x + 3(x-1) + 2(x-2) = 5x - 6.$$

於是 $5x-6 = x+2$ 給出 $x=2$，它不在 $[1,2)$ 內。（它確是一個解，但我們已經把它計算在內。）沒有新的解。

$0 \le x < 1$。　此時 $x-1<0$ 亦成立，所以

$$L(x) = (x+1) - x - 3(x-1) + 2(x-2) = -x.$$

於是 $-x = x+2$ 給出 $x=-1$，不在 $[0,1)$ 內。沒有解。

$-1 \le x < 0$。　此時還有 $|x| = -x$，所以

$$L(x) = (x+1) + x - 3(x-1) + 2(x-2) = x.$$

方程 $x = x+2$ 根本沒有解。

$x < -1$。　四個絕對值的內部全部為負，所以

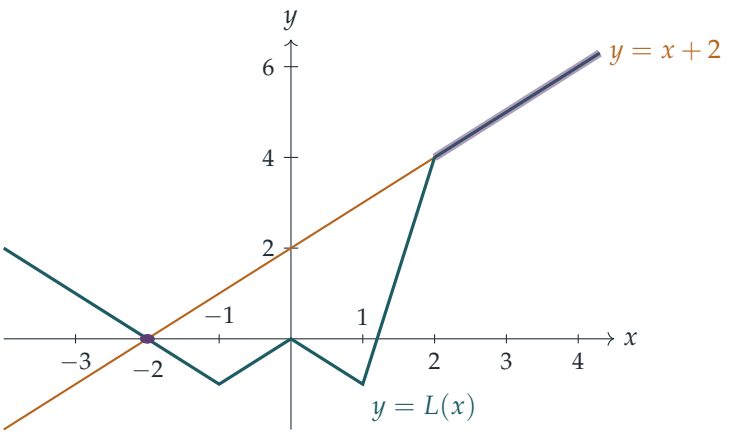
$$L(x) = -(x+1) + x - 3(x-1) + 2(x-2) = -x - 2.$$

於是 $-x-2 = x+2$ 給出 $x=-2$，而 $-2 < -1$，所以這是一個真正的解。驗算：$L(-2) = 1-2+9-8 = 0 = -2+2$。

結論。　方程的解是

$$x = -2 \qquad \text{以及所有} x \ge 2.$$

圖像顯示了原因：$y = L(x)$（藍綠色）是由線段組成的折線，它與直線 $y = x+2$（琥珀色）在 $x=-2$ 處相交一次，然後由 $x=2$ 起與該直線重合。



驗算

代入幾個數值：$L(-2) = 0 = -2 + 2$，$L(5) = 6 - 5 + 12 - 6 = 7 = 5 + 2$，而在 $x = 0$ 時得 $L(0) = 1 + 3 - 4 = 0 \neq 2$。以電腦用精確分數運算，在 100,000 個隨機點上確認了 L 的五條線性公式；並發現在 $[-20, 20]$ 上步長為 0.01 的格點中，方程恰好在 $x = -2$ 以及所有 $x \geq 2$ 的格點上成立，其餘各處均不成立。

常見錯誤

- 在 $x \geq 2$ 時得到 $x + 2 = x + 2$，卻寫「無解」或「有無窮多個解，所以一定是哪裏出了錯」，而沒有看出這是一整個區間的解。
- 接受了像 $x = -1$（來自 $0 \leq x < 1$）這類落在所考慮區間之外的根。
- 遺漏了最外面的區域 $x < -1$，而孤立解 $x = -2$ 正正就在那裏。

STEP 之外

像 L 這樣的函數是分段線性（piecewise linear）的：它連續（continuous），並且在有限多個「角點」之間是線性的。這類函數是線性規劃（linear programming）和最優化（optimisation）的核心，在那裏，求絕對值之和 $\sum |x - a_i|$ 的最小值會引出中位數（median）而非平均數（mean）。它們也是「連續但在孤立點上不可微（not differentiable）」的函數的第一個例子，這個主題在 Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析學入門教材）中有仔細的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。