詳細解答

STEP I 1997，第 3 題

純數學 • 冪與個位數字

> **STEP I 1997，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q3

關鍵思路

動筆之前，先把 a_7 寫成 3 的單一個冪(power)：把 3 的冪取立方，只是把指數(exponent)乘以三。之後各部分其實是就同一個龐大的數提出不同的問題。個位數字（units digit）只取決於指數模（modulo）4 的值，因為 3 的冪的個位數字以周期（period）4 循環出現。大小的界只需要與 10 的冪作一個粗略的比較。最後一部分則建基於這個界：a_7 極大，$1/a_7$ 便小得可以忽略。

解答

首先求出封閉形式（closed form）。若 $a_n = 3^k$，則 $a_{n+1} = (3^k)^3 = 3^{3k}$，所以每一步指數都乘以 3。由 $a_1 = 3^1$ 出發，用歸納法（induction）可得

$$a_n = 3^{3^{n-1}}, \qquad \text{所以} \qquad a_7 = 3^{3^6} = 3^{729}.$$

第 (i) 部分

乘積的個位數字只取決於各因數的個位數字。因此要追蹤 3^k 的個位數字，只需把上一個個位數字乘以 3，然後只保留個位：

k	1	2	3	4	5	$\cdots$
個位數字：3^k	3	9	7	1	3	$\cdots$

到 $k = 4$ 時個位數字回到 1，此後 $3, 9, 7, 1$ 這個規律便以周期 4 重複出現。（換句話說，$3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$，所以 $3^{4m+r} \equiv 3^r \pmod{10}$。）

? **想一想** 怎樣不用長除法求出 729 模 4 的值？

由於 $3 \equiv -1 \pmod 4$，我們有 $3^6 \equiv (-1)^6 = 1 \pmod 4$。（直接計算：$729 = 4 \times 182 + 1$。）因此 $3^{729} = 3^{4\cdot 182+1}$ 的個位數字與 3^1 的相同，即

故a_7 的個位數字是3.

第 (ii) 部分

把指數每三個分成一組：$729 = 3 \times 243$，所以

$$a_7 = 3^{729} = \left(3^3\right)^{243} = 27^{243} > 10^{243} \geq 10^{100},$$

當中用到 $27 > 10$（以及正數取正數次冪後大小次序不變這個事實）。因此 $a_7 \geq 10^{100}$，正如所求。這個界遠遠談不上緊：事實上 a_7 有 348 位數字。

第 (iii) 部分

把分數拆開：

$$\frac{a_7 + 1}{2a_7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a_7}.$$

由於 $a_7 > 0$，第二項是正數。根據第 (ii) 部分，它同時極小：

$$0 < \frac{1}{2a_7} \leq \frac{1}{2 \times 10^{100}} < 10^{-100}.$$

因此

$$0.5 < \frac{a_7 + 1}{2a_7} < 0.5 + 10^{-100} < 0.505.$$

凡是嚴格介乎 0.5 與 0.505 之間的數，取至小數點後兩位都是 0.50：小數點後第三位是 0，遠遠未到需要進位的 5。所以

$$\frac{a_7 + 1}{2a_7} = 0.50 \text{ （準確至小數點後兩位）。}$$

事實上，它的小數展開式以 0.5000... 開始，在 5 之後至少有 100 個零。

驗算

電腦可以精確地處理 3^{729}。把 3 連續取立方六次，可確認 $a_7 = 3^{729}$，這個數有 348 位數字，個位數字是 3，並且 $27^{243} = 3^{729} > 10^{243}$。用精確的分數運算，可確認 $\frac{a_7+1}{2a_7}$ 嚴格介乎 $\frac{1}{2}$ 與 $\frac{1}{2} + 10^{-100}$ 之間。你也可以用較小的例子檢驗第 (i) 部分的方法：$a_2 = 3^3 = 27$ 的指數是 $3 \equiv 3 \pmod 4$，由此預測個位數字是 7，結果確實如此。

常見錯誤

- 把 a_7 看成 $3^{3\cdot 7}$ 或 3^{18}，而不是 3^{3^6}：每一步是把指數乘以 3，而不是加 3。

- 把指數對模 10 化簡，而不是對模 4 化簡。個位數字以周期 4 循環，所以起作用的是指數模 4 的值。
- 在第 (iii) 部分只寫「0.5」而不加任何理據。「準確至兩位小數」指的是 0.50，而且你需要用上下界說明這個值不可能達到 0.505。

STEP 之外

第 (i) 部分讓你初嘗模算術（modular arithmetic）和歐拉定理（Euler's theorem）的滋味：$3^4 \equiv 1 \pmod{10}$，是因為 $\varphi(10) = 4$。數論學家要找出像 $3^{3^{3^3}}$ 這類巨大冪塔（power tower）的末幾位數字，靠的正是逐層重複運用這種化簡。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 從零開始建立同餘（congruence）和元素的階（order of an element）的理論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。