詳細解答

# STEP I 1997，第 2 題

純數學 • 反三角函數的導數

> **STEP I 1997，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q2

## 關鍵思路

在第 (i) 部分，f 的導數（derivative）會化簡為零，所以 f 是常數，但只限於它有定義的每一個區間（interval）之內：點 $x = -1$ 把實數線分成兩段，而兩邊的常數並不相同。在第 (ii) 部分，先求 $x$ 對 $y$ 的導數，再把結果倒轉過來會較為容易；功夫在於把 $\sin y^2$ 和 $\cos y^2$ 改寫成以 $x$ 和 $y$ 表示的式子，而 $y$ 的取值範圍正正在這裏起作用。

## 解答

### 第 (i) 部分

這個函數對所有 $x \neq -1$ 都有定義。設 $u = \dfrac{1-x}{1+x}$。由商法則（quotient rule），

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}, \qquad 1+u^2 = \frac{(1+x)^2+(1-x)^2}{(1+x)^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1+x)^2}.$$

利用 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1} u = \dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$（鏈式法則（chain rule）），

$$\begin{aligned} \mathrm{f}'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{(1+x)^2}{2(1+x^2)} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \qquad (x \neq -1). \end{aligned}$$

> **想一想** $\mathrm{f}'(x) = 0$ 是否表示 f 在所有地方都等於同一個常數？

不是。導數為零只能保證函數在一個區間上是常數（這是由中值定理（mean value theorem）得出的）。f 的定義域（domain）是 $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$，即兩個區間，所以 f 在

每一段上都是常數，而這兩個常數可以不同。要求出每個常數，可以代入一個方便計算的點，或者取極限（limit）。

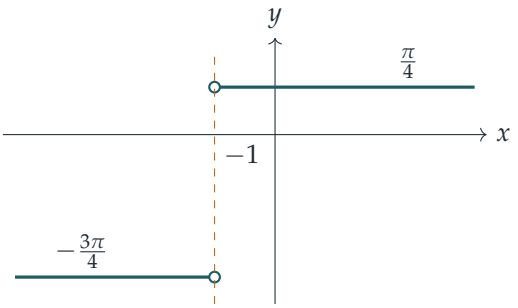
**當 $x > -1$**：取 $x = 0$。於是 $\mathrm{f}(0) = \tan^{-1} 0 + \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$。

**當 $x < -1$**：令 $x \to -\infty$。這時 $\tan^{-1} x \to -\frac{\pi}{2}$，而 $\dfrac{1-x}{1+x} \to -1$，所以 $\tan^{-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) \to -\frac{\pi}{4}$。由於 f 在這個區間上是常數，這個常數就等於該極限，即 $-\frac{3\pi}{4}$。（另一個做法：取 $x = -\sqrt{3}$，得 $\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -(2+\sqrt{3}) = -\tan\frac{5\pi}{12}$，所以 $\mathrm{f}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{12} = -\frac{3\pi}{4}$。）

因此

$$\mathrm{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}, & x > -1, \\ -\dfrac{3\pi}{4}, & x < -1. \end{cases}$$

函數在 $x = -1$ 處出現大小為 $\pi$ 的跳躍，是因為 $\dfrac{1-x}{1+x}$ 在該處由 $-\infty$ 直衝到 $+\infty$，於是它的反正切（inverse tangent）便由 $-\frac{\pi}{2}$ 躍升至 $\frac{\pi}{2}$。




**第 (ii) 部分**

利用積法則（product rule）和鏈式法則，求 $x = y \sin y^2$ 對 $y$ 的導數：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \sin y^2 + 2y^2 \cos y^2.$$

現在把兩個三角函數項都用 $x$ 和 $y$ 表示。

- 由於 $y > 0$，可以除以 $y$：$\sin y^2 = \dfrac{x}{y}$。
- 由於 $0 < y^2 < \frac{\pi}{2}$，有 $\cos y^2 > 0$，所以取正平方根：

$$\cos y^2 = \sqrt{1 - \sin^2 y^2} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{y},$$

其中最後一步用到 $\sqrt{y^2} = y$，這是因為 $y > 0$ 才成立。

所以

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{x}{y} + 2y\sqrt{y^2 - x^2} = \frac{x + 2y^2\sqrt{y^2 - x^2}}{y}.$$

這個式子嚴格為正，因為 $x > 0$、$y > 0$，而平方根是非負的。因此可以把它倒轉（反函數法則（inverse function rule）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$，在 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \neq 0$ 時成立）：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x + 2y^2\sqrt{y^2 - x^2}},$$

這正是所要證明的結果。

**想一想** 為甚麼題目堅持要 $0 < y < (\pi/2)^{1/2}$？

沒有這個條件，$\cos y^2$ 就有可能是負數，而正確的公式在平方根前面便要有一個負號。這個限制同時令 $y \sin y^2$ 在這個範圍內嚴格遞增（strictly increasing）（上面求得的導數是正數），由 0 上升至 $(\pi/2)^{1/2}$，所以在 $0 < x < (\pi/2)^{1/2}$ 內的每一個 $x$ 都恰好對應一個 $y$，$y$ 才真正是 $x$ 的函數。

## 驗算

- 第 (i) 部分：$\mathrm{f}(1) = \frac{\pi}{4} + \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{4}$，而 $\mathrm{f}(-3) = \tan^{-1}(-3) + \tan^{-1}(-2) \approx -1.2490 - 1.1071 = -2.3562 \approx -\frac{3\pi}{4}$。我們在 10,000 個隨機點上驗證過這兩個常數。
- 第 (ii) 部分：當 $x = 0.5$，以數值方法解 $y \sin y^2 = 0.5$ 得 $y \approx 0.81355$，而公式給出 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \approx 0.60284$，與用數值方法求得的反函數的有限差分（finite difference）導數吻合。
- 在 $x = 0$ 附近，$y \sin y^2 \approx y^3$，所以 $y \approx x^{1/3}$，且 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \approx \frac{1}{3y^2}$；公式給出 $y/(y^3 + 2y^3) = \frac{1}{3y^2}$，兩者一致。

## 常見錯誤

- 斷定對所有 $x$ 都有 $\mathrm{f}(x) = \frac{\pi}{4}$，忘記了 $x = -1$ 把定義域分成兩部分。
- 寫出 $\cos y^2 = \pm\sqrt{\cdots}$，卻沒有說明為甚麼應取正根。

## STEP 之外

$\mathrm{f}' = 0$ 只能在定義域的各個連通（connected）部分上得出常數，這是中值定理的推論，而中值定理是大學分析（analysis）課程中最早遇到的重要結果之一。第 (ii) 部分是反函

數定理（inverse function theorem）的一個入門例子：導數不為零的函數可以在局部求反函數，而反函數的導數就是原來導數的倒數。Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析學入門教材）對這兩個課題都有仔細的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。