詳細解答

STEP I 1997，第 14 題

概率與統計 • 期望成本的最小化

STEP I 1997，第 14 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/97-s1-q14

關鍵思路

成本 T 是隨機變量（random variable）X 的函數，所以它的期望值（expectation）就是該函數乘以概率密度函數（density）後的積分。在 $x = y$ 處把積分拆開，便可將 $\mathrm{E}(T)$ 寫成 y 的普通函數；之後求其最小值只是大學一年級程度的微積分練習：求導、令導數為零，再檢查駐點（stationary point）確實是極小值。

解答

我們取 $y \geq 0$，因為準備工作的份量為負數並無意義。記 $T = g(X)$，其中

$$g(x) = \begin{cases} y & x \leq y, \\ y + r + s(x - y) & x > y. \end{cases}$$

於是

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(T) &= \int_0^\infty g(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty y\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_y^\infty (r + s(x - y))\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

這裏我們把成本 y 抽了出來，因為無論發生甚麼事都要支付這筆費用。由於密度函數的積分為 1，第一個積分等於 y。

至於第二個積分，作代換 $u = x - y$，則 $\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^{-u}$，而 u 由 0 變到 ∞：

$$\begin{aligned}\int_y^\infty (r + s(x-y))\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \mathrm{e}^{-y}\int_0^\infty (r+su)\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u \\ &= \mathrm{e}^{-y}\Big(r\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u + s\int_0^\infty u\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u\Big) \\ &= \mathrm{e}^{-y}(r+s),\end{aligned}$$

其中用到 $\int_0^\infty u\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = [-u\mathrm{e}^{-u}]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = 1$（分部積分法，integration by parts）。因此

$$C(y) = \mathrm{E}(T) = y + (r+s)\,\mathrm{e}^{-y}.$$

想一想 有沒有方法不用積分就能看出 $\mathrm{e}^{-y}(r+s)$ 這個因子？

有。水災造成損失的概率是 $\mathrm{P}(X > y) = \mathrm{e}^{-y}$。在已知損失發生的條件下，超出的部分 $X - y$ 仍然服從平均值為 1 的指數分佈（exponential distribution），因為指數分佈具有無記憶性（memoryless），所以損失的期望值是 $r + s\cdot 1$。兩者相乘便得 $(r+s)\mathrm{e}^{-y}$。

現在求最小值。求導得

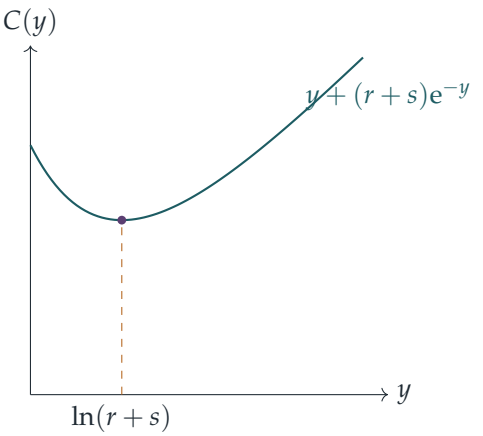
$$C'(y) = 1 - (r+s)\mathrm{e}^{-y}, \qquad C''(y) = (r+s)\mathrm{e}^{-y} > 0.$$

所以 $C'(y) = 0$ 當且僅當 $\mathrm{e}^y = r+s$，即 $y = \ln(r+s)$。由於對所有 y 都有 $C'' > 0$，C 是凸函數（convex），C' 遞增，因此 C 在 $y < \ln(r+s)$ 時遞減，在 $y > \ln(r+s)$ 時遞增。故此這個駐點就是全域最小值（global minimum），而要令總成本的期望值最小，應取

$$y = \ln(r+s),$$

這正是所求。成本期望值的最小值為 $C(\ln(r+s)) = \ln(r+s) + 1$。

以上需要 $\ln(r+s) \geq 0$，即 $r+s \geq 1$，題目隱含了這個假設。若 $r+s < 1$，則對每個 $y \geq 0$ 都有 $C'(y) > 0$，所以最佳選擇是 $y = 0$：損失實在太便宜，根本不值得作任何準備。



（草圖以 $r+s=3$ 繪畫。）

驗算

- 當 $y=0$ 時，我們必定要支付損失，而 $\mathrm{E}(T)=r+s\,\mathrm{E}(X)=r+s$，與 $C(0)$ 吻合。
- 取 $r=2$、$s=3$，公式給出 $y=\ln 5\approx 1.609$，最小成本為 $1+\ln 5\approx 2.609$；對 $C(y)$ 作精細的網格搜尋，找到的最小值點相同；另外在 $y=1$ 下模擬 4×10^5 年，得出平均成本為 2.844，而公式給出的值是 $1+5\mathrm{e}^{-1}\approx 2.839$。
- 當 $r+s$ 增大時，y 亦隨之增加：水災的代價愈高，就愈值得多作準備，這與常理相符。

常見錯誤

- 忘記準備成本 y 是每一年都要支付的，而不是只在 $X\le y$ 時才支付。
- 對 $sx\,\mathrm{e}^{-x}$ 積分時漏掉了 $-sy\,\mathrm{e}^{-x}$ 一項，結果得出 $\mathrm{e}^{-y}(r+s+sy)$ 而不是 $\mathrm{e}^{-y}(r+s)$。
- 找到駐點後，沒有證明它是極小值。

STEP 之外

這是不確定情況下作決策（decision-making under uncertainty）的一個小例子：選擇一個行動，使損失的期望值最小。同樣的結構，即在一筆確定的成本與一項預期的懲罰之間取得平衡，正是運籌學(operations research)中「報童問題」(newsvendor problem)以及統計學中貝葉斯決策（Bayes decisions）這個概念的基礎。上文用到的無記憶性，在連續分佈之中刻劃了指數分佈的特徵；Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教科書）涵蓋了這個性質，以及隨機變量函數的期望值。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。