詳細解答

STEP I 1997，第 13 題

概率與統計 • 條件概率

STEP I 1997，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/97-s1-q13

關鍵思路

Blond 先生應否開燈，只取決於等着他的是哪一種陷阱，所以整道題歸結為一個條件概率（conditional probability）：在沒有金絲雀的情況下，陷阱是森蚺而不是炸彈的機會。刺客是誰之所以重要，只因為這會影響所用的武器。因此，我們用全概率公式（law of total probability）把兩層（先是刺客，然後是武器）結合起來，以「沒有金絲雀」為條件，再比較兩種做法的死亡風險。

解答

設定

設 M_i 為 i 先生佈下陷阱的事件，其中 $i = 1,2,3,4$，並設 A、B 和 C 分別為陷阱是森蚺、炸彈或金絲雀的事件。已知

$$P(M_i) = \frac{i}{10}, \qquad P(A \mid M_i) = \frac{i+1}{10}, \quad P(B \mid M_i) = \frac{i}{10}, \quad P(C \mid M_i) = \frac{9-2i}{10}.$$

這些數值互相吻合：$\frac{1+2+3+4}{10} = 1$，而且對每個 i，三個武器概率均為非負，其和為 $\frac{(i+1)+i+(9-2i)}{10} = 1$。牽涉其中的刺客恰好一名，武器亦恰好一種，所以事件 $M_i \cap A$、$M_i \cap B$ 和 $M_i \cap C$ 構成所有可能情況的一個劃分（partition）。

寂靜告訴他甚麼

根據全概率公式，

$$P(A) = \sum_{i=1}^{4} P(M_i)P(A \mid M_i) = \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + 4\cdot 5}{100} = \frac{40}{100},$$
$$P(B) = \sum_{i=1}^{4} P(M_i)P(B \mid M_i) = \frac{1 + 4 + 9 + 16}{100} = \frac{30}{100}.$$

所以 $P(C') = P(A) + P(B) = \frac{70}{100}$。（驗算一下：$P(C) = \frac{7+10+9+4}{100} = \frac{30}{100}$。）

想一想 我們需要找出現在哪一名刺客的可能性最大嗎？

不需要。聽不到歌聲確實會改變每名刺客的可能性，但死亡風險只取決於武器。由於 $A \subseteq C'$ 及 $B \subseteq C'$，以 C' 為條件只是把這兩個概率按比例重新縮放：

$$P(A \mid C') = \frac{P(A)}{P(C')} = \frac{40}{70} = \frac{4}{7}, \qquad P(B \mid C') = \frac{P(B)}{P(C')} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}.$$

有關刺客的資訊已經包含在這兩個數之中。

比較兩個選擇

設 K 為 Blond 先生被殺的事件。一旦以 C' 為條件，陷阱不是森蚺就是炸彈，而他的命運只取決於陷阱和他的選擇。

開燈。炸彈有 $\frac{1}{2}$ 的概率殺死他，森蚺則有 $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ 的概率殺死他。所以

$$P(K \mid C', \text{開燈}) = \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{3} = \frac{9}{42} + \frac{8}{42} = \frac{17}{42}.$$

不開燈。炸彈必定不會殺死他，森蚺則有 $\frac{1}{2}$ 的概率殺死他。所以

$$P(K \mid C', \text{不開燈}) = \frac{3}{7}\cdot 0 + \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{7} = \frac{12}{42}.$$

由於 $\frac{12}{42} < \frac{17}{42}$，**Blond 先生應該不開燈便進入寓所**。這樣他的生還機會是 $\frac{5}{7}$（約 71%），而開燈的話則是 $\frac{25}{42}$（約 60%）。

原因在於：森蚺雖然是較有可能出現的陷阱，但開燈真正令情況惡化的卻是炸彈。開燈把森蚺的風險由 $\frac{1}{2}$ 降至 $\frac{1}{3}$，卻把炸彈的風險由 0 升至 $\frac{1}{2}$。陷阱是森蚺的概率為 $\frac{4}{7}$，開燈可減少 $\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{6} = \frac{4}{42}$ 的風險；陷阱是炸彈的概率為 $\frac{3}{7}$，開燈卻要付出 $\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2} = \frac{9}{42}$ 的代價。代價較大。

驗算

- 在他細聽之前，開燈的風險是 $\frac{30}{100}\cdot\frac{1}{2}+\frac{40}{100}\cdot\frac{1}{3}$，不開燈的風險是 $\frac{40}{100}\cdot\frac{1}{2}$。這正是上面的答案乘以 $\frac{7}{10}$，理應如此，因為金絲雀對兩邊的比較都毫無影響。
- 只要 $p=P(A\mid C')$ 滿足 $\frac{1}{2}p<\frac{1}{2}(1-p)+\frac{1}{3}p$，即只要 $p<\frac{3}{4}$，不開燈的策略便較佳。這裏 $p=\frac{4}{7}$，遠低於這個數值。
- 模擬 10^6 個晚上，得出開燈時的死亡率約為 0.404，不開燈時約為 0.286，與 $\frac{17}{42}\approx 0.405$ 及 $\frac{2}{7}\approx 0.286$ 吻合。

常見錯誤

- 忘記以「沒有金絲雀」為條件，直接把 $P(A)=0.4$ 和 $P(B)=0.3$ 當作全部事實來計算。得出的建議相同，但死亡概率卻是錯的。
- 混淆生還與死亡：開燈時森蚺的數字是 $\frac{2}{3}$ 的生還機會，所以死亡機會是 $\frac{1}{3}$。
- 把各名刺客當作可能性均等，或者忽略刺客這一層，直接把武器概率取平均。

STEP 之外

這是決策論（decision theory）中的一道小題：我們選擇在後驗分佈（posterior distribution）下令期望損失（expected loss）最小的行動，而這裏的「損失」就是死亡的概率。只有 $P(A\mid C')$ 才起作用這一觀察，以及最佳行動隨之改變的臨界值 $p<\frac{3}{4}$，都是分析這類決策的典型手法：數據改變後驗分佈，後驗分佈決定行動。想進一步了解條件概率和貝葉斯更新（Bayesian updating），可參閱 Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（概率論入門教材）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。