詳細解答

STEP I 1997，第 12 題

概率與統計 • 中心極限定理

> **STEP I 1997，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q12

關鍵思路

直接解出這個二次方程（quadratic equation），令 X 成為 T 的一個簡單函數。這樣，每個關於 X 的問題都變成關於 T 的問題，而後者的分佈（distribution）我們完全清楚。一個巧妙的簡化是：$1-T$ 同樣在 $[0,1]$ 上服從均勻分佈（uniform distribution）。最後一部分涉及大量獨立（independent）副本之和，這正是提示我們使用中心極限定理（central limit theorem）。

解答

X 的分佈

由二次公式（quadratic formula），$x^2+2x+T=0$ 的根為 $x=-1\pm\sqrt{1-T}$。由於 $0\le T\le 1$，這兩個根都是實數，而較大的根取正號：

$$X=-1+\sqrt{1-T}.$$

當 T 取遍 $[0,1]$ 時，X 取遍 $[-1,0]$。

設 $U=1-T$。由於 T 在 $[0,1]$ 上服從均勻分佈，U 亦然：把區間繞其中點反射，並不會改變均勻的密度（density）。所以 $X=\sqrt{U}-1$，其中 $U\sim \mathrm{U}[0,1]$。

$X>-\frac{1}{3}$ 的概率

由於 $X+1=\sqrt{U}$，而且兩邊皆為非負，

$$X>-\tfrac{1}{3}\iff \sqrt{U}>\tfrac{2}{3}\iff U>\tfrac{4}{9}.$$

因為兩邊皆為非負，平方後不等式的方向保持不變。因此

$$\mathrm{P}\left(X > -\tfrac{1}{3}\right) = \mathrm{P}\left(U > \tfrac{4}{9}\right) = 1 - \tfrac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

（等價地，$T < \frac{5}{9}$。）

平均值與方差

對於 $U \sim \mathrm{U}[0,1]$，其密度在 $[0,1]$ 上為 1，所以

$$\mathrm{E}(\sqrt{U}) = \int_0^1 u^{1/2}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{3}, \qquad \mathrm{E}((\sqrt{U})^2) = \mathrm{E}(U) = \frac{1}{2}.$$

因此

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(\sqrt{U}) - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}.$$

減去一個常數並不會改變方差（variance），所以

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(\sqrt{U}) = \mathrm{E}(U) - (\mathrm{E}\sqrt{U})^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18},$$

正如所求。

> **想一想** 要求出這些矩（moments），我們需要 X 的概率密度函數（probability density function）嗎？

不需要。對任意函數 g，$\mathrm{E}(g(U)) = \int_0^1 g(u)\,\mathrm{d}u$，所以我們可以直接用 U 來計算。如果你仍想知道密度：當 $-1 \le x \le 0$ 時，$\mathrm{P}(X \le x) = \mathrm{P}(U \le (x+1)^2) = (x+1)^2$，所以 X 在 $[-1,0]$ 上的密度為 $2(x+1)$。把 $x \cdot 2(x+1)$ 在該區間上積分，同樣得到 $-\frac{1}{3}$。

800 個根之和

由於各次實驗互相獨立，各個 X_i 亦互相獨立，而且每個的平均值（mean）為 $-\frac{1}{3}$，方差為 $\frac{1}{18}$。所以

$$\mathrm{E}(Y) = 800 \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right) = -\frac{800}{3}, \qquad \mathrm{Var}(Y) = 800 \cdot \frac{1}{18} = \frac{400}{9},$$

其中把方差相加時用到了獨立性。Y 的標準差（standard deviation）為 $\frac{20}{3}$。

由於 800 很大，中心極限定理指出 Y 近似服從 $\mathrm{N}\left(-\frac{800}{3}, \frac{400}{9}\right)$。我們要求

$$\mathrm{P}(Y \le K) \approx \Phi\left(\frac{K + \frac{800}{3}}{20/3}\right) = 0.08.$$

查表得 $\Phi(1.405) \approx 0.92$，所以由對稱性 $\Phi(-1.405) \approx 0.08$。因此

$$\frac{K + \frac{800}{3}}{20/3} \approx -1.405,$$

$$K \approx -\frac{800}{3} - 1.405 \times \frac{20}{3} \approx -266.67 - 9.37 \approx -276.$$

想一想 這裏不是應該作連續性校正（continuity correction）嗎？

不需要。每個 X_i 都是連續隨機變量（continuous random variable），所以 Y 也是，因而無須作連續性校正。這種校正只用於以正態分佈（normal distribution）近似離散分佈（discrete distribution），例如二項分佈（binomial distribution）。

驗算

- 根是正確的：當 $T = 0$ 時，方程為 $x(x+2) = 0$，其較大的根為 $0 = -1 + \sqrt{1}$。
- $\mathrm{E}(X) = -\frac{1}{3}$ 位於 $[-1, 0]$ 之內，而密度 $2(x+1)$ 偏向 0 的一方，所以平均值高於中點 $-\frac{1}{2}$ 是合理的。
- 以 400 000 個 T 值進行模擬（simulation），得到 $\mathrm{P}(X > -\frac{1}{3}) \approx 0.555$，平均值 ≈ -0.3337，方差 ≈ 0.0556。直接模擬 Y 共 4000 次，得到 $\mathrm{P}(Y \leq -276.03) \approx 0.083$，與 0.08 吻合。

常見錯誤

- 在二次公式中取了負號。這樣得到的是較小的根。
- 寫成 $\mathrm{Var}(Y) = 800^2 \mathrm{Var}(X)$。這是 $800X_1$ 的方差，而不是 800 個獨立副本之和的方差。
- 用了 $+1.405$ 而不是 -1.405。概率 0.08 位於下尾，所以 K 必定低於平均值。

STEP 之外

把 $X = g(U)$ 寫成均勻變量 U 的函數，這個技巧也可以反過來用。如果 F 是任意一個連續的分佈函數（distribution function），那麼 $F^{-1}(U)$ 的分佈函數就是 F。這個*逆變換法*（*inverse transform method*）正是電腦利用均勻隨機數模擬隨機變量的方法。中心極限定理在這裏被當作黑箱使用，而在大學的第一個概率課程中，會用矩母函數（moment generating function）或特徵函數（characteristic function）來證明它。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率入門教材）涵蓋了這兩個概念。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。