詳細解答

STEP I 1997，第 11 題

力學 • 有阻力的運動

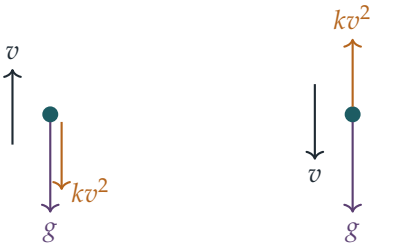
> **STEP I 1997，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q11

關鍵思路

阻力取決於速度，但我們想要的是速度作為距離的函數，而不是時間的函數。因此我們把加速度寫成 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\frac{1}{2}v^2)$。以 $w = v^2$ 為未知量，運動方程（equation of motion）便成為一條線性一階方程，用積分因子（integrating factor）即可一舉解出。最後一部分的關鍵在於一個物理事實：阻力永遠與運動方向相反，所以質點掉頭時，阻力的方向也隨之改變。

解答

我們把質點（particle）模擬為一個單位質量的點，沿鉛垂線運動，受其重量 g（向下）以及大小為 kv^2、方向與速度相反的阻力（resistance）作用。由拋射點起向上量度 s。



上升時　　下降時

上升運動

質點上升時，其速度 v 向上，所以阻力 kv^2 與重量一同向下作用。由牛頓第二定律(Newton's second law)（質量為 1）得

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = -g - kv^2,$$

這裏用到 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$。設 $w = v^2$，則 $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} = 2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$：

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} + 2kw = -2g.$$

這條方程對 w 而言是線性的。乘以積分因子 e^{2ks}，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(w\,\mathrm{e}^{2ks}) = -2g\,\mathrm{e}^{2ks} \quad\Longrightarrow\quad w\,\mathrm{e}^{2ks} = -\frac{g}{k}\,\mathrm{e}^{2ks} + C.$$

當 $s = 0$ 時，$w = u^2$，所以 $C = u^2 + \frac{g}{k}$。因此

$$v^2 = \left(u^2 + \frac{g}{k}\right)\mathrm{e}^{-2ks} - \frac{g}{k} = u^2\mathrm{e}^{-2ks} + \frac{g}{k}(\mathrm{e}^{-2ks} - 1),$$

這正是所求的 $(*)$。（在 $v\,\mathrm{d}v/(g + kv^2) = -\mathrm{d}s$ 中分離變數（separating variables），得出一個對數，同樣可行。）

最大高度

當 $v = 0$ 時質點停止上升；由於 $(*)$ 的右方隨 s 嚴格遞減，這種情況恰好出現一次，就在最大高度 H 處。在 $(*)$ 中令 $v = 0$：

$$\left(u^2 + \frac{g}{k}\right)\mathrm{e}^{-2kH} = \frac{g}{k} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{e}^{2kH} = 1 + \frac{ku^2}{g},$$

所以

$$H = \frac{1}{2k}\ln\left(1 + \frac{ku^2}{g}\right).$$

下降路徑

> ? **想一想** 推導 $(*)$ 的過程從沒有提及運動方向。那麼它為甚麼不會繼續成立？

其實推導確實用到了方向，就在阻力的正負號上。下降時速度向下，所以阻力 kv^2 此時向上作用，與重量相反。仍然以向上量度 s，並以 v 表示向上的速度，方程變成

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = -g + kv^2, \qquad \text{所以} \qquad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} - 2kw = -2g,$$

這是另一條微分方程（differential equation）。所以 $(*)$ 在下降路徑上並不成立。

為了具體看清這一點，我們以 $s = H$ 時 $w = 0$ 為條件解這條新方程。由積分因子 e^{-2ks} 得 $w = \frac{g}{k} + D\mathrm{e}^{2ks}$，而 $w(H) = 0$ 則迫使 $D = -\frac{g}{k}\mathrm{e}^{-2kH}$：

$$v^2 = \frac{g}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-2k(H-s)}\right) \qquad (0 \le s \le H).$$

利用 $u^2 + \frac{g}{k} = \frac{g}{k}\mathrm{e}^{2kH}$，方程 $(*)$ 可以寫成 $v^2 = \frac{g}{k}(\mathrm{e}^{2k(H-s)} - 1)$。設 $x = 2k(H-s) \ge 0$，這兩個式子分別是 $\frac{g}{k}(1 - \mathrm{e}^{-x})$ 和 $\frac{g}{k}(\mathrm{e}^{x} - 1)$，而

$$(\mathrm{e}^{x} - 1) - (1 - \mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 2 = (\mathrm{e}^{x/2} - \mathrm{e}^{-x/2})^2 > 0 \quad \text{當} x > 0.$$

所以在最高點以下的每一點，$(*)$ 給出的速率都是錯的（兩者只在 $s = H$ 處相符，該處兩者皆為零）；它高估了下降時的速率。

還有一個簡捷的物理論證。方程 $(*)$ 把 v^2 表示為只與高度有關的函數，所以假如它在下降時也成立，質點經過每個高度時的速率便會與上升時相同，並以速率 u 返回起點。但阻力在整個運動過程中都作負功，所以質點損失了能量，返回時必定較慢。事實上，在 $s = 0$ 處，正確的公式給出

$$v^2 = \frac{g}{k}\left(1 - \frac{1}{1 + ku^2/g}\right) = \frac{u^2}{1 + ku^2/g} < u^2.$$

驗算

- 當 $k \to 0$ 時，$\ln(1 + ku^2/g) \approx ku^2/g$，所以 $H \to u^2/(2g)$，即大家熟悉的無阻力高度；而 $(*)$ 則趨向 $v^2 = u^2 - 2gs$（展開 $\mathrm{e}^{-2ks} \approx 1 - 2ks$）。
- 數值上，取 $u = 10$、$k = 0.05$、$g = 9.8$，對運動方程逐步計算得 $H \approx 4.1224$，與 $\frac{1}{0.1}\ln(1 + \frac{5}{9.8}) = 4.12245$ 吻合；質點返回時 $v^2 \approx 66.22$，與 $u^2/(1 + ku^2/g)$ 吻合，而不是 $u^2 = 100$。下降至一半時，$v^2 \approx 36.51$，而 $(*)$ 則會給出 44.87。

常見錯誤

- 用單一方程描述整個運動，並把阻力寫成 $-kv^2$：由於 $v^2 \ge 0$，這一項永遠指向同一方向，這正是一條公式無法同時涵蓋上升和下降兩段的原因。（若要用單一方程，便需要 $-kv|v|$。）
- 使用 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 並解出以 t 表示的 v，然後苦於消去 t；用 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$ 則可直達答案。

STEP 之外

對於在空氣中高速運動的球，二次阻力（quadratic drag）是一個很好的模型，而下降方程顯示出*終端速度*（terminal velocity）：隨着下落距離增加，$v^2 \to g/k$。把阻力寫

成 $-kv|v|$，便得到一條描述整個運動的非線性方程；大學一年級力學有很大部分就是研究這類方程，其中力取決於速度，而能量並不守恆。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）對取決於速度的力和終端速度有細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。