詳細解答

STEP I 1997，第 10 題

力學 • 圓周運動

STEP I 1997，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/97-s1-q10

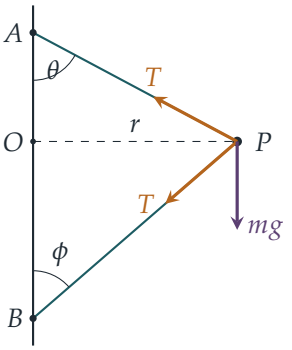
關鍵思路

由於小環是光滑(smooth)的，繩子可以自由地穿過它滑動，所以 P 兩邊的張力(tension)是相同的。沿垂直方向分解（沒有垂直加速度），再沿水平方向分解（加速度為 $r\omega^2$，指向轉軸），然後把一條方程除以另一條，令 T 和 m 消去。接着利用和差化積公式（sum-to-product formulae），這個比值便化為單一個半角的正切。

解答

模型與受力

我們把 P 視為一個質點（particle），繫於一條輕而不可伸長（light inextensible）的繩子上；小環是光滑的，所以 PA 和 PB 中的張力同為 T。設 O 為圓心，它在直線 AB 上，且 $OP = r$。作用於 P 的力有：它的重量 mg、沿 PA 的張力 T 和沿 PB 的張力 T。



繩段 PA 與垂直線成角 θ（即在 A 點 AB 與 AP 之間的夾角），所以它對 P 的拉力有向上

的分量 $T\cos\theta$ 和指向轉軸的分量 $T\sin\theta$。同樣，PB 在 B 點與垂直線成角 ϕ，它對 P 的拉力有向下的分量 $T\cos\phi$ 和指向轉軸的分量 $T\sin\phi$。

運動方程

P 以恆定速率沿水平圓周運動，所以它沒有垂直加速度，而有一個指向 O、大小為 $r\omega^2$ 的加速度。分解各力，得

$$\begin{aligned} \text{垂直方向：}\quad & T\cos\theta - T\cos\phi = mg, \\ \text{水平方向：}\quad & T\sin\theta + T\sin\phi = mr\omega^2. \end{aligned}$$

無論三角形的形狀如何，這兩條方程都成立（例如，假如 P 在 A 的上方，$\cos\theta$ 只不過變成負數而已）。由於 $mg > 0$，第一條方程給出 $\cos\theta > \cos\phi$，所以 $\phi > \theta$：下方的繩段與轉軸的傾斜角較大，正如圖中所示。

證明結果

把垂直方向的方程除以水平方向的方程，

$$\frac{\cos\theta - \cos\phi}{\sin\theta + \sin\phi} = \frac{g}{r\omega^2}.$$

由和差化積公式，

$$\begin{aligned} \cos\theta - \cos\phi &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\phi)\,\sin\tfrac{1}{2}(\phi-\theta), \\ \sin\theta + \sin\phi &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\phi)\,\cos\tfrac{1}{2}(\phi-\theta). \end{aligned}$$

由於 $0 < \theta < \pi$ 及 $0 < \phi < \pi$（它們是一個真正的三角形 APB 的內角），我們有 $0 < \frac{1}{2}(\theta+\phi) < \pi$，所以 $\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi) \neq 0$，可以約去：

$$\tan\frac{\phi-\theta}{2} = \frac{g}{r\omega^2},$$

這正是所要證明的結果。

張力

想一想 答案可以含有 $\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)$，但不可含有 $\phi-\theta$。我們怎樣才能消去 $\cos\frac{1}{2}(\phi-\theta)$？

由水平方向的方程和第二條和差化積公式，

$$2T\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\phi)\cos\tfrac{1}{2}(\phi-\theta) = mr\omega^2.$$

我們已知 $\alpha = \frac{1}{2}(\phi - \theta)$ 的正切，所以可以借助一個對邊為 g、鄰邊為 $r\omega^2$ 的直角三角形求出它的餘弦。我們有 $0 < \phi - \theta < \pi$，所以 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，從而 $\cos\alpha > 0$：

$$\cos\tfrac{1}{2}(\phi - \theta) = \frac{r\omega^2}{\sqrt{r^2\omega^4 + g^2}}.$$

代入並約去 $r\omega^2$，

$$T = \frac{m\sqrt{r^2\omega^4 + g^2}}{2\sin\frac{1}{2}(\theta + \phi)}.$$

這個結果有一個漂亮的解釋：$\sqrt{(mg)^2 + (mr\omega^2)^2}$ 是兩個張力的合力（resultant）的大小，而兩個大小同為 T、彼此夾角為 $\pi - (\theta + \phi)$（即角 APB）的力，其合力的大小為 $2T\sin\frac{1}{2}(\theta + \phi)$。

驗算

- 當 $\omega \to \infty$ 時，右邊趨向 0，所以 $\phi \to \theta$。小環被甩向外，直至與 AB 的中點處於同一水平，這正是重力可以忽略時我們預期的情況。
- 當 $\omega \to 0$ 時，$\tan\frac{1}{2}(\phi - \theta) \to \infty$，所以 $\phi - \theta \to \pi$：繩子筆直下垂，這是沒有旋轉時唯一可能的情況。
- 數值方面，我們隨機選取 A、B 和 P 的位置，直接由向量形式的運動方程求出 T 和 ω^2，再由坐標量度 θ 和 ϕ，然後與兩個結果比較：在約 8000 個個案中，最大的相對誤差為 3×10^{-12}。

常見錯誤

- 使用兩個不同的張力 T_1、T_2。小環光滑，就只有一條繩子和一個張力；若用兩個不同的張力，問題便無法確定。
- 把 PB 中張力的垂直分量的正負號弄錯：這段繩子是把 P 向下拉向 B 的。
- 為 $\cos\frac{1}{2}(\phi - \theta)$ 取負平方根，這樣會得出負的張力。

STEP 之外

對於給定的繩長，小環位於以 A 和 B 為焦點（foci）的橢圓（ellipse）上，而繩子與 P 點的切線成相等的角：這就是橢圓的反射性質（reflection property）。因此兩個張力的合力沿橢圓的法線（normal）方向，就像一條彎成這個形狀的光滑鐵線所施的反作用力一樣。把約束（constraints）看成垂直於曲面的力，正是拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）

的起點。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）收錄了許多這類旋轉系統的題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。