詳細解答

STEP I 1997，第 1 題

純數學 • 硬幣組合的計數

> **STEP I 1997，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q1

本題在 *Beyond STEP* 第 9.5 節湊零錢中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch09/making-change.html

關鍵思路

要數「方法」的數目，必須有一套系統，把每一個組合恰好列出一次。最自然的做法，是先定下面額最大的硬幣的數目，然後是次大的，如此類推。一旦只剩下 2p 和 1p 硬幣，數目便立即可得：2p 硬幣的數目決定了一切。這樣做還有一個好處：10p 的答案可以直接用於 20p 的答案。

解答

次序並不重要：一種「方法」就是選定每種硬幣各用多少個。因此我們要數的是非負整數（non-negative integer）解的數目。

基本組件：2p 和 1p 硬幣

要用 2p 和 1p 硬幣湊成 r 便士，我們選定 2p 硬幣的數目 b，它可以是 0 至 $\lfloor r/2 \rfloor$ 之間的任何整數。餘下的 $r - 2b \geq 0$ 便士便由 1p 硬幣湊成，而且恰好只有一種方法。所以方法的數目是

$$\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1.$$

湊成 10 便士

- 使用一個 *10p* 硬幣。它獨自湊成整個金額：1 種方法。
- 不用 *10p* 硬幣。我們按 5p 硬幣的數目分類，即 0、1 或 2 個：

5p 硬幣數目	留給 2p 和 1p 的金額	方法數目 $\lfloor r/2 \rfloor + 1$
2	0	1
1	5	3
0	10	6

  這樣共有 $1 + 3 + 6 = 10$ 種方法。

每一個組合都有確定的 10p 硬幣數目和 5p 硬幣數目，所以它恰好被數了一次，不多不少。總數是 $1 + 10 = 11$ 種方法，正如題目所求。

湊成 20 便士

以 $F(n)$ 表示用 5p、2p 和 1p 硬幣湊成 n 便士的方法數目。我們剛才已得出 $F(10) = 10$，而顯然 $F(0) = 1$（不用任何硬幣）。至於 $F(20)$，我們按 5p 硬幣的數目分類，由 0 至 4 個：

5p 硬幣數目	留給 2p 和 1p 的金額	方法數目
4	0	1
3	5	3
2	10	6
1	15	8
0	20	11

所以 $F(20) = 1 + 3 + 6 + 8 + 11 = 29$。

? **想一想** 怎樣把 20p 和 10p 硬幣納入計算，而又不會重複計數？

再按大面額硬幣分類。要麼我們使用 20p 硬幣，那麼它必定是唯一的硬幣：1 種方法。要麼不用，這時我們按 10p 硬幣的數目分類：

- 兩個 10p 硬幣：沒有餘額，$F(0) = 1$ 種方法；
- 一個 10p 硬幣：餘下 10p，$F(10) = 10$ 種方法；
- 沒有 10p 硬幣：餘下 20p，$F(20) = 29$ 種方法。

這些情況互不相交（disjoint），並且涵蓋了所有可能，所以湊成 20 便士的方法數目是

$$1 + 1 + 10 + 29 = 41.$$

驗算

- 親手列出 10p 的情況：10；5+5；5+2+2+1、5+2+1+1+1、5+1 × 5；然後是 2 × 5、2 × 4+1 × 2、...、1 × 10（這類共六個）。合共 11 個。
- 用電腦簡單地數一次（對每種硬幣的數目逐一循環），得出 11 和 41。這同時確認了中間值 $F(10) = 10$ 和 $F(20) = 29$，以及不用 20p 硬幣時共有 40 種方法。
- 小的情況很容易親手驗算：用 5p、2p 和 1p 硬幣湊成 5p 共有 $F(5) = 4$ 種方法，與 $1 + 3$ 吻合。

常見錯誤

- 把次序也計算在內，以致 5+2+2+1 和 2+5+1+2 變成不同的「方法」。它們其實是同一組硬幣。
- 遺漏只用一個硬幣的方法：單獨一個 10p 硬幣，以及單獨一個 20p 硬幣。
- 只給出一個總數，卻看不出任何系統。題目已提醒，沒有解釋的答案不會得分，所以分類討論本身才是重點。

STEP 之外

這些其實是把 n 拆成取自某個固定集合的部分的分拆（partition）。處理它們的巧妙方法是使用生成函數（generating function）：方法的數目就是

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{20})},$$

中 x^n 的係數，而我們的分類討論，不過是把這些因式逐個乘開而已。生成函數把計數問題化為代數，並由此通往歐拉（Euler）和拉馬努金（Ramanujan）關於分拆的研究。想進一步探索，可參考 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*；至於數論方面，則可參考 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。