詳細解答

STEP III 1996，第 9 題

力學 • 圓周運動

> **STEP III 1996，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q9

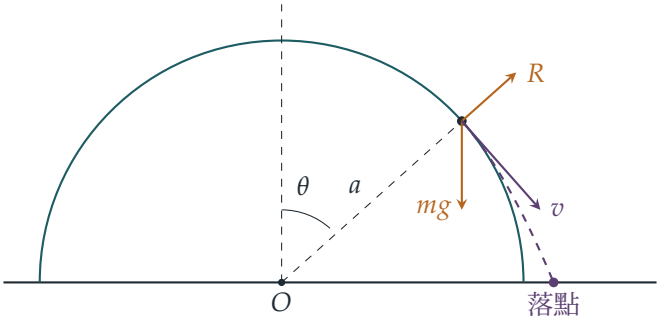
關鍵思路

整個運動分為兩個階段。質點仍在球面上時，它沿圓周運動，因此由能量守恆（conservation of energy）可求出其速率，再由徑向運動方程可求出法向反作用力（normal reaction）；當這個反作用力降至零的一刻，質點便離開球面。此後它只是一個普通的拋體（projectile），從已知的位置、以已知的速率沿切線方向拋出，我們只需求出它在何處越過球心所在的水平面。

解答

模型

把質點視為質量為 m 的質點（point mass），置於一個光滑的固定球面上，球心為 O，並忽略空氣阻力。它所受的力只有重量 mg 和法向反作用力 R，後者沿半徑方向並背向 O。設 P 為質點所在位置，θ 為 OP 與鉛垂向上方向之間的夾角，v 為質點的速率。由於初始位移很小，我們取初速率為零（取極限而言）。



第一階段：在球面上

反作用力與運動方向垂直，所以它不作功，能量因而守恆。質點由頂點下降了 $a - a\cos\theta$，所以

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mga(1-\cos\theta), \qquad \text{即} \qquad v^2 = 2ga(1-\cos\theta).$$

質點仍在球面上時，它沿半徑為 a 的圓周運動，所以沿指向 O 的方向分解力，可得

$$mg\cos\theta - R = \frac{mv^2}{a} \quad \Longrightarrow \quad R = mg\cos\theta - 2mg(1-\cos\theta) = mg(3\cos\theta - 2).$$

想一想 為甚麼質點恰好在 $R = 0$ 時離開球面？

球面只能向外推，所以只要兩者仍有接觸，便有 $R \geq 0$。當 θ 由 0 開始增大，R 由 mg 持續減小，而按上面的公式，過了 $\cos\theta = \frac{2}{3}$ 之後便會有 $R < 0$。這意味着球面要把質點向內拉，但它做不到。因此質點在以下時刻失去接觸：

$$\cos\theta = \tfrac{2}{3}, \qquad \sin\theta = \tfrac{\sqrt{5}}{3}, \qquad v^2 = 2ga(1-\tfrac{2}{3}) = \tfrac{2}{3}ga.$$

第二階段：拋體運動

以 O 為原點建立坐標軸，x 軸沿水平方向（取運動的方向），y 軸鉛垂向上。離開球面的一刻，質點位於

$$x_0 = a\sin\theta = \tfrac{\sqrt{5}}{3}a, \qquad y_0 = a\cos\theta = \tfrac{2}{3}a,$$

而它的速度沿切線方向，與水平線成俯角 θ：

$$u_x = v\cos\theta = \tfrac{2}{3}v, \qquad u_y = -v\sin\theta = -\tfrac{\sqrt{5}}{3}v, \qquad \text{其中} v = \sqrt{\tfrac{2}{3}ga}.$$

現在 $y = y_0 + u_y t - \frac{1}{2}gt^2$，所以質點到達 $y = 0$ 時，有

$$\tfrac{1}{2}gt^2 + \tfrac{\sqrt{5}}{3}v\,t - \tfrac{2}{3}a = 0.$$

取正根，

$$t = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}v + \sqrt{\frac{5}{9}v^2 + \frac{4}{3}ga}}{g}.$$

代入 $v^2 = \frac{2}{3}ga$，根號內的式子是 $\frac{10}{27}ga + \frac{36}{27}ga = \frac{46}{27}ga$，而 $\frac{\sqrt{5}}{3}v = \sqrt{\frac{10}{27}ga}$。因此

$$t = \sqrt{\frac{a}{27g}}\,(\sqrt{46} - \sqrt{10}).$$

飛行期間所經過的水平距離為

$$\begin{aligned} u_x t &= \tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{2}{3}ga}\cdot\sqrt{\frac{a}{27g}}\,(\sqrt{46}-\sqrt{10}) = \frac{2\sqrt{2}\,a}{27}(\sqrt{46}-\sqrt{10}) \\ &= \frac{2a}{27}(\sqrt{92}-\sqrt{20}) = \frac{2a}{27}(2\sqrt{23}-2\sqrt{5}) = \frac{a}{27}(4\sqrt{23}-4\sqrt{5}). \end{aligned}$$

加上起始的水平距離 $x_0 = \frac{\sqrt{5}}{3}a = \frac{9\sqrt{5}}{27}a$，質點與通過 O 的水平面相遇之處，與球心的距離為

$$x_0 + u_x t = \frac{a}{27}(9\sqrt{5} + 4\sqrt{23} - 4\sqrt{5}) = \frac{a(5\sqrt{5} + 4\sqrt{23})}{27}$$

正是所要求的結果。

飛行途中不會碰到球面

為求嚴謹，我們應該驗證拋體確實不會碰到球面。沿飛行路徑設 $f(t) = x^2 + y^2 - a^2$。按 t 的冪次展開：

- 常數項為 $x_0^2 + y_0^2 - a^2 = 0$；
- t 的係數為 $2(x_0 u_x + y_0 u_y) = 0$，因為速度與半徑垂直；
- t^2 的係數為 $u_x^2 + u_y^2 - g y_0 = v^2 - ga\cos\theta = 0$，這正正是 $R = 0$ 的條件；
- 餘下的是 $-g u_y t^3 + \frac{1}{4}g^2 t^4$，而 $u_y < 0$。

所以當 $t > 0$ 時，$f(t) = g|u_y|\, t^3 + \frac{1}{4}g^2 t^4 > 0$。質點一直留在球面之外，而上面求得的落點距離就是它實際到達的距離。

驗算

- 答案約為 $1.125a$。它大於 a，這是必然的，因為質點必須越過球面，而球面在 O 的水平面上伸展至距離 a 處。
- 離開球面時的高度為球心以上 $\frac{2}{3}a$，這是一個廣為人知的結果，而且與 g 和 m 無關。落點距離同樣與它們無關，這也是量綱分析（dimensional analysis）所要求的：a 是題目中唯一的長度。
- 我們以數值方法逐步計算了這個運動：由一個極小的位移出發，對 $\ddot{\theta} = (g/a)\sin\theta$ 作龍格－庫塔（Runge–Kutta）積分，到 $R = 0$ 時停止，然後改以拋體運動繼續，結果落在 $1.12458a$ 處。精確公式給出 $1.124580\ldots a$。

常見錯誤

- 用了 $v^2 = ga\cos\theta$（來自 $R = 0$），卻忘記把它與能量方程結合，或者用錯了速率：離開球面時 $v^2 = \frac{2}{3}ga$，而不是 $\frac{1}{3}ga$。
- 把拋體當作水平拋出。速度是沿切線方向的，在水平線以下成角 θ，所以從一開始便有向下的分量。

► 由離開球面的位置而不是由球心量度落點距離，這樣便漏掉了 x_0。

STEP 之外

「反作用力消失時接觸便告終止」這個條件，是單側約束（unilateral constraint）的一個例子。這類約束在力學中隨處可見，由金屬線上的小珠，以至駛過拱橋的汽車，都是例子。解答最後一步出現的巧合，即拋體的路徑與球面在離開點處吻合至二階，說明在那一刻拋物線與圓具有相同的曲率（curvature）。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）正是以這種精神處理圓周運動、約束力和能量方法。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。