詳細解答

STEP III 1996，第 8 題

純數學 • 莫比烏斯變換

> **STEP III 1996，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q8

關鍵思路

這些都是莫比烏斯變換（Möbius transformation，又稱分式線性變換，fractional linear transformation），而幾乎所有結論都來自兩點觀察。把 $y = T(x)$ 的分母消去後，所得方程對 x 是線性的，對 y 也是線性的，所以可以解出其中任何一個。另外，把 $T(x)$ 寫成一個常數加上 $1/(cx-d)$ 的倍數，便能立刻看出 T 永遠取不到哪個值。至於複合（composition），只須代入再通乘便可；把每個 T 與矩陣 $\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}$ 對應起來，結果最容易整理。

解答

不動點

當 $x \neq d/c$ 時，$T(x) = x$ 即 $ax - b = x(cx-d)$，亦即

$$cx^2 - (a+d)x + b = 0. \qquad (*)$$

首先我們驗證 $(*)$ 不會產生被禁止的值 $x = d/c$（當 $c \neq 0$ 時）。代入得 $d^2/c - (a+d)d/c + b = (bc-ad)/c \neq 0$，所以 $(*)$ 的每個根都是真正的不動點（fixed point）。

若 $c \neq 0$，$(*)$ 是二次方程，不動點為

$$x = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4bc}}{2c}.$$

若 $(a+d)^2 > 4bc$，有兩個不動點；若 $(a+d)^2 = 4bc$，有一個；若 $(a+d)^2 < 4bc$，則沒有。

若 $c = 0$，條件 $ad \neq bc$ 變成 $ad \neq 0$，所以 $d \neq 0$，而 $T(x) = (b - ax)/d$ 處處有定義。這時 $(*)$ 變成 $(a+d)x = b$。若 $a+d \neq 0$，恰有一個不動點 $x = b/(a+d)$。若 $a+d = 0$ 而 $b \neq 0$，則沒有不動點。若 $a+d = 0$ 且 $b = 0$，則 $T(x) = -ax/d = x$，所以 T 是恆等變換（identity），每個 x 都是不動點。

逆變換

由 $y(cx - d) = ax - b$ 得 $cxy - dy = ax - b$，所以 $x(cy - a) = dy - b$，因此

$$x = T^{-1}(y) = \frac{dy - b}{cy - a}.$$

這與 T 的形式相同，其中

$$a' = d, \qquad b' = b, \qquad c' = c, \qquad d' = a,$$

而且條件依然成立，因為 $a'd' - b'c' = da - bc \neq 0$。（除以 $cy - a$ 是合理的，因為 $y = a/c$ 永遠不是 T 的值；見下一部分。）

集合 S_r

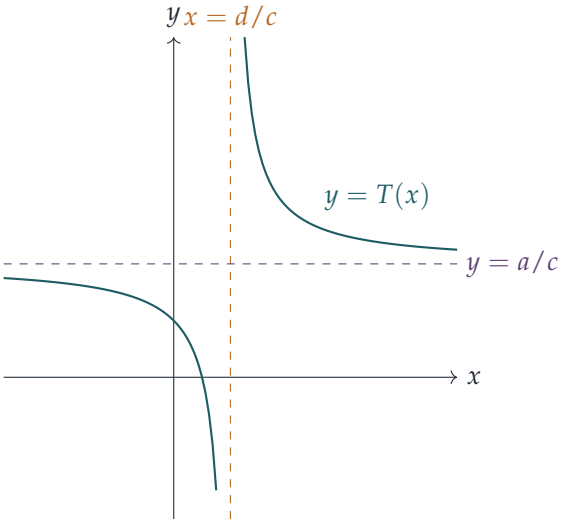
設 $c \neq 0$。$T(x)$ 恰好在 $cx \neq d$ 時有定義，所以我們取 $r = d/c$。於是 T 對每個 $x \in S_{d/c}$ 都有定義。要求出像（image），我們把常數部分分拆出來：

$$ax - b = \frac{a}{c}(cx - d) + \frac{ad - bc}{c}, \qquad \text{所以} \qquad T(x) = \frac{a}{c} + \frac{ad - bc}{c\,(cx - d)}.$$

由於 $ad - bc \neq 0$，第二項永不為零，所以 $T(x) \neq a/c$。反過來，每個 $y \neq a/c$ 都能取到。由逆變換的公式得 $x = (dy - b)/(cy - a)$，而這個 x 不等於 d/c，因為 d/c 不是 T^{-1} 的值（把同一個論證用於 T^{-1}，它的「a'/c'」就是 d/c）。因此

$$T(S_{d/c}) = S_{a/c},$$

而 T 是由 $S_{d/c}$ 到 $S_{a/c}$ 的雙射（bijection）。其圖像是一條等軸雙曲線（rectangular hyperbola），漸近線（asymptote）為 $x = d/c$ 和 $y = a/c$：



（草圖採用 $T(x) = (2x-1)/(x-1) = 2 + 1/(x-1)$。）

若 $c = 0$，則 $d \neq 0$ 且 $a \neq 0$（因為 $ad \neq 0$），而 $T(x) = (b - ax)/d$ 是一個非常數的線性函數。所以 T 對所有實數 x 都有定義，無須排除任何值，並且把 $\mathbb{R}$ 雙射地映滿 $\mathbb{R}$。假如我們仍然移去一點 r，則 $T(S_r) = S_{T(r)} = S_{(b-ar)/d}$。

複合

把 $T_1(x) = \dfrac{a_1x - b_1}{c_1x - d_1}$ 代入 T_2，然後把分子和分母同乘以 $c_1x - d_1$：

$$\begin{aligned} T_2(T_1(x)) &= \frac{a_2(a_1x - b_1) - b_2(c_1x - d_1)}{c_2(a_1x - b_1) - d_2(c_1x - d_1)} \\ &= \frac{(a_1a_2 - b_2c_1)\,x - (a_2b_1 - b_2d_1)}{(a_1c_2 - c_1d_2)\,x - (b_1c_2 - d_1d_2)}. \end{aligned}$$

所以 T_3 具有相同的形式，其中

$$a_3 = a_1a_2 - b_2c_1, \quad b_3 = a_2b_1 - b_2d_1, \quad c_3 = a_1c_2 - c_1d_2, \quad d_3 = b_1c_2 - d_1d_2.$$

想一想 「相同的形式」真的已經證明了嗎？我們還需要 $a_3d_3 \neq b_3c_3$。

是的，這確實需要證明。這些係數正好是以下矩陣乘積的元素：

$$\begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ c_2 & -d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ c_1 & -d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 & -b_3 \\ c_3 & -d_3 \end{pmatrix},$$

而每個矩陣的行列式（determinant）都是 $bc - ad$。由於乘積的行列式等於行列式的乘積，

$$b_3c_3 - a_3d_3 = (b_1c_1 - a_1d_1)(b_2c_2 - a_2d_2) \neq 0.$$

（你也可以直接展開，只需幾行代數運算。）所以 T_3 是同一類型的變換。

T^2 何時是恆等變換？

在複合公式中取 $T_1 = T_2 = T$。於是 $T^2(x) = \dfrac{Ax - B}{Cx - D}$，其中

$$A = a^2 - bc, \qquad B = b(a - d), \qquad C = c(a - d), \qquad D = bc - d^2.$$

T^2 是恆等變換，即是對其定義域內所有 x 都有 $Ax - B = x(Cx - D)$，而定義域是除了至多幾個點以外的全部實數。一個多項式等式若在無限多個點上成立，便恆等地成立，所以我們比較係數：

$$C = 0, \qquad A + D = 0, \qquad B = 0,$$

亦即

$$c(a - d) = 0, \qquad (a - d)(a + d) = 0, \qquad b(a - d) = 0.$$

- 若 $a = d$，三式全部成立。事實上 $T^2(x) = \dfrac{(a^2 - bc)x}{-(bc - a^2)} = x$，其中 $a^2 - bc = ad - bc \neq 0$。
- 若 $a \neq d$，我們需要 $b = c = 0$ 和 $a = -d$。這時 $T(x) = ax/(-d) = x$，所以 T 本身就是恆等變換。

所以 T^2 是恆等變換，**當且僅當** $a = d$，**或** $b = c = 0$ **且** $a + d = 0$（即 T 是恆等變換）。第二種情況是平凡的，所以值得留意的對合（involution）正好是形如 $x \mapsto \dfrac{ax - b}{cx - a}$ 而 $a^2 \neq bc$ 的映射。

一個例子

根據剛才求得的條件，我們需要兩個滿足 $a = d$ 的映射，而它們的複合卻有 $a \neq d$。取

$$T_1(x) = -x \quad (a_1, b_1, c_1, d_1) = (1, 0, 0, 1), \qquad T_2(x) = 1 - x \quad (a_2, b_2, c_2, d_2) = (1, 1, 0, 1).$$

兩者都有 $a = d$，所以 T_1^2 和 T_2^2 都是恆等變換。這也可以直接看出：$-(-x) = x$ 和 $1 - (1 - x) = x$。它們的複合是

$$T_3(x) = T_2(T_1(x)) = 1 - (-x) = x + 1,$$

寫成標準形式時有 $(a_3, b_3, c_3, d_3) = (1, -1, 0, -1)$，所以 $a_3 \neq d_3$。事實上 $T_3^2(x) = x + 2 \neq x$。

從幾何上看，直線上的兩個反射（reflection）（分別關於 0 和 $\frac{1}{2}$）複合起來是一個平移（translation），而平移並不是自身的逆變換。若想要一個 $c \neq 0$ 的例子，可試試 $T_1(x) = -1/x$ 配上同一個 T_2。這時 $T_3(x) = (x + 1)/x$，而 $T_3^2(x) = (2x + 1)/(x + 1)$。

驗算

- 採用草圖中的例子 $T(x) = (2x-1)/(x-1)$（$a=2$，$b=1$，$c=d=1$）。它的不動點是 $x^2-3x+1=0$ 的根，即 $x = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$，你可以驗證 $T(2.618\ldots) = 2.618\ldots$。它的逆變換是 $(y-1)/(y-2)$，在 $y=2=a/c$ 處沒有定義，與預測相符。
- 在複合公式中取 $T_1 = T$、$T_2 = T^{-1}$，即 $(a_2, b_2, c_2, d_2) = (d, b, c, a)$，得 $a_3 = ad - bc$，$b_3 = 0$，$c_3 = 0$，$d_3 = bc - ad$。這是恆等變換，正如所料。
- 我們用電腦驗證了逆變換、像和複合的公式，方法是以精確分數對數千組隨機的 (a,b,c,d) 進行計算。電腦亦就所有滿足 $ad \neq bc$ 的整數 $a,b,c,d \in [-3,3]$，把 T^2 為恆等變換的條件與直接計算的結果互相對照。

常見錯誤

- 忘記平凡的情況：$a=d$ 並非必要條件，因為恆等變換（$b=c=0$，$a=-d$）的平方也是恆等變換。
- 證明了複合是兩個線性函數之比，卻沒有驗證 $a_3 d_3 \neq b_3 c_3$。
- 在 $c=0$ 的情況下尋找被排除的點。非常數的線性映射處處有定義，而且能取遍每一個實數。

STEP 之外

容許 $x=\infty$，並規定 $T(d/c)=\infty$ 和 $T(\infty)=a/c$，便令每個這樣的 T 都成為擴充直線（extended line）上的雙射。若係數取複數，就得到黎曼球面（Riemann sphere）上的莫比烏斯變換。上面用到的矩陣對應關係說明這些映射構成一個羣（group），它同構（isomorphic）於可逆 2×2 矩陣模去純量倍數所得的羣（射影線性羣，projective linear group）。複合變成矩陣乘法，而一個不是恆等變換的映射是對合，恰好當它的矩陣的跡（trace）為零；在這裏即是 $a-d=0$。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）中有一章講莫比烏斯變換，寫得十分精彩。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。