詳細解答

STEP III 1996，第 7 題

純數學 • 根的對稱函數

> **STEP III 1996，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q7

關鍵思路

兩部分都建基於同一個事實：三個數的任何對稱式（symmetric expression），都可以用它們的和、兩兩乘積之和，以及它們的積來表示，而這三個量正好就是以這三個數為根（roots）的三次方程（cubic）的係數。在 (i) 中，這把一個非線性方程組化為一條三次方程。在 (ii) 中，我們根本不需要求出根：希羅公式（Heron's formula）對 a, b, c 是對稱的，所以只要有三次方程的係數就足夠了。

解答

第 (i) 部分

首先是平方和：

$$\alpha^2 = (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx), \qquad \text{所以} \qquad x^2+y^2+z^2 = \alpha^2 - 2\beta.$$

接着我們利用因式分解（factorisation）

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx),$$

你可以展開右方來驗證：$x\cdot xy$ 和 $y\cdot(-xy)$ 這類交叉項共九個，它們兩兩抵消，餘下三個形如 $-xyz$ 的項。代入後得

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3 &= 3\gamma + \alpha(\alpha^2 - 2\beta - \beta) \\ &= \alpha^3 - 3\alpha\beta + 3\gamma. \end{aligned}$$

所以 $A = 1$, $B = -3$ 及 $C = 3\gamma$。（這裏 C 是積的三倍，所以它取決於 γ；A 和 B 則是純數字。）

現在處理方程組。我們有 $\alpha = 1$，而平方和給出

$$3 = \alpha^2 - 2\beta = 1 - 2\beta \quad \Longrightarrow \quad \beta = -1.$$

立方和則給出

$$4 = \alpha^3 - 3\alpha\beta + 3\gamma = 1 + 3 + 3\gamma \quad \Longrightarrow \quad \gamma = 0.$$

想一想 我們已知 α, β 和 γ。怎樣由此求回 x, y, z？

x, y, z 三數的和為 α、兩兩乘積之和為 β、積為 γ，當且僅當它們是以下方程的三個根：

$$(t - x)(t - y)(t - z) = t^3 - \alpha t^2 + \beta t - \gamma = 0.$$

兩個方向都成立：若 x, y, z 是方程組的解，它們就是這條三次方程的根；反過來，這條三次方程的根不論以甚麼次序排列，都有正確的 α, β, γ，因而（根據上面的恆等式）滿足全部三條方程。這裏的三次方程是

$$t^3 - t^2 - t = t\,(t^2 - t - 1) = 0, \qquad \text{所以} \qquad t = 0, \quad t = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \quad t = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{5}).$$

因此解為

$$\{x, y, z\} = \left\{ 0,\ \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5}),\ \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \right\},$$

次序不拘：由於三個值互不相同，合共有六個有序三元組 (x, y, z)。

第 (ii) 部分

由於 a, b, c 是該三次方程的根，

$$x^3 - 16x^2 + 81x - 128 = (x - a)(x - b)(x - c)$$

對所有 x 都成立。比較 x^2 的係數，得 $a + b + c = 16$，所以 $s = 8$。竅門來了：把 $x = s = 8$ 代入這個恆等式。右方變成 $(s - a)(s - b)(s - c)$，正是希羅公式中的那個乘積：

$$(s - a)(s - b)(s - c) = 8^3 - 16 \cdot 8^2 + 81 \cdot 8 - 128 = 512 - 1024 + 648 - 128 = 8.$$

因此

$$\text{面積} = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)} = \sqrt{8 \cdot 8} = 8.$$

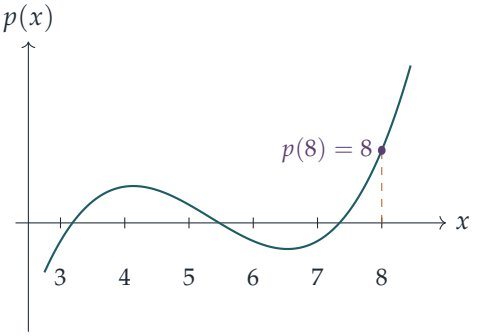
想一想 真的有一個三角形以這三個數為邊長嗎？

我們應該檢查一下，因為只有當 a, b, c 都是正數，而且每一個都小於其餘兩個之和時，希羅公式所描述的才是一個三角形。由於 $a < b + c \iff 2a < a + b + c \iff a < s$，

我們需要三個根全部是實數、正數，並且小於 8。設 $p(x) = x^3 - 16x^2 + 81x - 128$。那麼

$$p(3) = -2, \quad p(4) = 4, \quad p(5) = 2, \quad p(6) = -2, \quad p(7) = -2, \quad p(8) = 8,$$

所以根據正負號的變化，在 $(3,4)$, $(5,6)$ 和 $(7,8)$ 每個區間內各有一個根。三次方程最多有三個根，所以這些就是全部的根，而且每個根都嚴格介乎 0 與 8 之間。這個三角形確實存在，其面積為 8。



驗算

- 在 (i) 中，試取 $x = 1, y = 2, z = 3$：$\alpha = 6, \beta = 11, \gamma = 6$，而 $216 - 198 + 18 = 36 = 1 + 8 + 27$。
- 取 $x = 0$, $y = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1.618$, $z = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \approx -0.618$：和為 1，又因為 $y^2 = y + 1$ 及 $z^2 = z + 1$，平方和為 $(y + z) + 2 = 3$，立方和為 $y^2 + z^2 + (y + z) = 3 + 1 = 4$。
- 以數值計算，(ii) 中的根為 $a \approx 3.186$, $b \approx 5.471$, $c \approx 7.343$。把這些值代入希羅公式得 8.000；用餘弦定理（cosine rule）求出 C 後，$\frac{1}{2}ab\sin C$ 亦得出相同結果。

常見錯誤

- 只給出一個三元組，而沒有列出全部六種排列；或者忘記 $t = 0$ 是 $t^3 - t^2 - t = 0$ 的一個根。
- 弄錯韋達公式（Vieta's formulas）中的正負號：對於 $t^3 - \alpha t^2 + \beta t - \gamma$，正負號是交替出現的。
- 沒有檢查這些根是否真的構成三角形，就直接求面積。

STEP 之外

對稱多項式基本定理（fundamental theorem of symmetric polynomials）指出：凡是 x, y, z 的多項式，只要在置換（permuting）這三個變數後保持不變，就必定是基本對稱函數（elementary symmetric functions）α, β, γ 的多項式。牛頓恆等式（Newton's identities）以遞歸方式給出冪和（power sums）$x^k + y^k + z^k$。這些想法通往伽羅瓦理論（Galois theory），它解釋了為甚麼三次和四次方程有求根公式，而一般的五次方程卻沒有。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣）是朝這個方向邁出第一步的好書。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。