詳細解答

STEP III 1996，第 6 題

純數學 • 矩陣群

> **STEP III 1996，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q6

本題在 *Beyond STEP* 第 6.8 節由奇異矩陣組成的羣中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch06/singular-group.html

關鍵思路

S 中每個矩陣（matrix）都是某個固定矩陣 $\mathbf{J}$ 的倍數，而 $\mathbf{J}^2$ 又是 $\mathbf{J}$ 的倍數，所以 S 中元素的相乘，歸根究底只是實數的相乘。出人意表的是，這個羣（group）的單位元（identity）並不是單位矩陣（identity matrix）$\mathbf{I}$：這個羣根本用不着 $\mathbf{I}$。第 (ii) 部分解釋了為何必然如此：在一個羣之內，每個元素都可以寫成涉及任何另一個元素的乘積，而行列式（determinant）是可乘的。

解答

第 (i) 部分

設

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{於是} \qquad \mathbf{J}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{J}.$$

S 的每個元素都是 $a\mathbf{J}$，其中 $a \neq 0$，我們記 $\mathbf{M}_a = a\mathbf{J}$。

封閉性（closure）。對於非零的 a 和 b，

$$\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b = ab\,\mathbf{J}^2 = 2ab\,\mathbf{J} = \mathbf{M}_{2ab}.$$

由於 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$，我們有 $2ab \neq 0$，所以乘積屬於 S。因此 S 在矩陣乘法下封閉。

現在檢查其餘的羣公理（group axioms）。

結合律（associativity）。矩陣乘法對所有 2×2 矩陣都滿足結合律，對 S 中的矩陣自然也成立。

單位元。我們要找 $\mathbf{M}_e$，使得對每個 b 都有 $\mathbf{M}_e\mathbf{M}_b = \mathbf{M}_b$，即 $2eb = b$。所以取 $e = \frac{1}{2}$：

$$\mathbf{M}_{1/2}\mathbf{M}_b = \mathbf{M}_{2\cdot\frac{1}{2}b} = \mathbf{M}_b,$$

同理 $\mathbf{M}_b\mathbf{M}_{1/2} = \mathbf{M}_b$。所以 $\mathbf{E} = \frac{1}{2}\mathbf{J}$ 是單位元，而且它屬於 S。

> ? **想一想** 單位矩陣 $\mathbf{I}$ 不在 S 之中。由矩陣組成的羣不是需要它嗎？

不需要。一個羣需要的是某個元素，對集合中其他元素起單位元的作用，而 $\frac{1}{2}\mathbf{J}$ 對 S 的每個元素都做到這一點。它並不是所有 2×2 矩陣的單位元（例如 $\frac{1}{2}\mathbf{JI} \neq \mathbf{I}$），但 $\mathbf{I}$ 不在 S 之中，所以這並無影響。

逆元（inverses）。給定 $\mathbf{M}_a$，我們要找 $\mathbf{M}_c$ 使得 $2ac = \frac{1}{2}$，所以 $c = \dfrac{1}{4a}$；因為 $a \neq 0$，這個數存在而且非零。於是

$$\mathbf{M}_a\mathbf{M}_{1/(4a)} = \mathbf{M}_{1/(4a)}\mathbf{M}_a = \mathbf{M}_{2a/(4a)} = \mathbf{M}_{1/2} = \mathbf{E}.$$

四條公理全部成立，所以 S 在矩陣乘法下是一個羣。（它甚至是阿貝爾羣（abelian group），因為 $\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b = \mathbf{M}_{2ab} = \mathbf{M}_b\mathbf{M}_a$。）留意 S 每個元素的行列式都是 $a^2 - a^2 = 0$。這些矩陣沒有通常意義下的逆矩陣，但每一個在羣內都有逆元。

第 (ii) 部分

假設 $\mathbf{A} \in G$ 滿足 $\det \mathbf{A} = 0$，並設 $\mathbf{B}$ 為 G 的任意元素。因為 G 是羣，$\mathbf{A}$ 在 G 中有逆元 $\mathbf{A}'$，滿足 $\mathbf{AA}' = \mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{E}$。（我們寫 $\mathbf{A}'$ 而不寫 $\mathbf{A}^{-1}$：它是 G 之內的逆元，而不是逆矩陣，後者並不存在。）

設 $\mathbf{C} = \mathbf{A}'\mathbf{B}$。由封閉性，$\mathbf{C} \in G$，而且

$$\mathbf{AC} = \mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{B}) = (\mathbf{AA}')\mathbf{B} = \mathbf{EB} = \mathbf{B},$$

這裏用到結合律，以及 $\mathbf{E}$ 是 G 的單位元這一事實。所以方程 $\mathbf{AC} = \mathbf{B}$ 在 G 中有解 $\mathbf{C}$。取行列式，並利用 $\det(\mathbf{XY}) = \det\mathbf{X}\det\mathbf{Y}$，

$$\det\mathbf{B} = \det\mathbf{A}\ \det\mathbf{C} = 0 \cdot \det\mathbf{C} = 0.$$

由於 $\mathbf{B}$ 是任意的，G 的每個元素都是奇異（singular）的。特別地，這樣的羣的單位元 $\mathbf{E}$ 也是奇異的，所以它不可能是 $\mathbf{I}$，正如我們在第 (i) 部分所見。

> ? **想一想** 我們在哪裏用到 G 是一個羣，而不僅僅是一個在乘法下封閉的集合？

我們用了逆元 $\mathbf{A}'$ 和單位元 $\mathbf{E}$，把 $\mathbf{B}$ 寫成 $\mathbf{A}$ 乘以 G 中的某個元素。沒有它們，結論便不成立。例如，$\{\mathbf{I}, \mathbf{0}\}$ 在乘法下封閉，並且包含一個奇異矩陣，但 $\mathbf{I}$ 並不奇異。（它不是羣：$\mathbf{0}$ 沒有逆元。）

$n = 3$ 的一個例子。我們仿照第 (i) 部分的做法。設

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G = \{\, a\mathbf{K} : a \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \,\}.$$

$\mathbf{K}^2$ 的每個元都是 $1+1+1 = 3$，所以 $\mathbf{K}^2 = 3\mathbf{K}$，並且

$$(a\mathbf{K})(b\mathbf{K}) = 3ab\,\mathbf{K}.$$

- 封閉性：若 $a, b \neq 0$，則 $3ab \neq 0$，所以乘積屬於 G。
- 結合律：這是從矩陣乘法繼承而來的。
- 單位元：$\mathbf{E} = \frac{1}{3}\mathbf{K}$，因為 $(\frac{1}{3}\mathbf{K})(b\mathbf{K}) = (b\mathbf{K})(\frac{1}{3}\mathbf{K}) = 3 \cdot \frac{1}{3}b\,\mathbf{K} = b\mathbf{K}$。
- 逆元：$a\mathbf{K}$ 的逆元是 $\dfrac{1}{9a}\mathbf{K}$，因為 $3 \cdot a \cdot \dfrac{1}{9a} = \frac{1}{3}$。

所以 G 在矩陣乘法下是一個羣。每個 $a\mathbf{K}$ 的三行都相同，所以 $\det(a\mathbf{K}) = 0$：這是一個由奇異 3×3 矩陣組成的羣。

（另一個同樣可行的例子，是所有形如 $\operatorname{diag}(a, b, 0)$ 而 $a, b \neq 0$ 的矩陣所組成的集合，其單位元為 $\operatorname{diag}(1, 1, 0)$。）

驗算

- 試一個例子：$\mathbf{M}_3\mathbf{M}_{1/12}$ 的每個元都是 $3 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$，所以它等於 $\mathbf{E} = \mathbf{M}_{1/2}$，與逆元公式 $\frac{1}{4a}$ 所預測的一致。
- 我們以精確分數，對數百組隨機的非零 a, b, c 作了檢查：2×2 和 3×3 兩族矩陣的封閉性、單位元和逆元公式都成立，這些矩陣的行列式全部為 0，而且 $\mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{B}) = \mathbf{B}$。

常見錯誤

- 把 $\mathbf{I}$ 當作單位元，或把 $\mathbf{A}^{-1}$ 當作通常的逆矩陣。兩者在 S 中都不存在。應該從羣本身的乘法規則找出單位元和逆元。
- 忘記檢查 $2ab \neq 0$。封閉性要求乘積既有正確的形式，*而且*參數非零。

STEP 之外

決定一個羣的是它的運算，而不是它的元素恰好身處何方。這裏的羣位於 $n \times n$ 矩陣之中，卻不與它們共用同一個單位元。事實上 $\mathbf{E}$ 必定滿足 $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}$，所以它是一個投影（projection），而這個羣以可逆映射的方式作用於 $\mathbf{E}$ 的像（image）上。映射 $a \mapsto \mathbf{M}_{a/2}$ 是由乘法下的非零實數到 S 的同構（isomorphism），你可以直接驗證。想進一步了解，可參閱 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣）；關於投影，可參閱 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數導論）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。