詳細解答

STEP III 1996，第 5 題

純數學 • 倍角公式

> **STEP III 1996，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q5

關鍵思路

用二項式定理（binomial theorem）展開 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^7$，再與棣美弗定理（de Moivre's theorem）比較，便可把 $\cos 7\theta$ 和 $\sin 7\theta$ 寫成多項式（polynomial）；全式除以 $\cos^7\theta$ 後，一切都化為 $t = \tan\theta$ 的冪。一旦把 $\tan 7\theta$ 寫成兩個 t 的多項式之比，使 $\tan 7\theta$ 為零的角便令分子為零，而使 $\tan 7\theta$ 無定義的角則令分母為零。除了一個因子 t 之外，兩個多項式都是偶函數（even function），所以它們會變成 t^2 的三次多項式（cubic），餘下的工作就交給韋達定理（Vieta's formulae）。

解答

$\tan 7\theta$ 的公式

設 $c = \cos\theta$ 及 $s = \sin\theta$，由棣美弗定理和二項式定理，

$$\cos 7\theta + \mathrm{i}\sin 7\theta = (c + \mathrm{i}s)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} \mathrm{i}^k c^{7-k} s^k.$$

假設 $\cos\theta \neq 0$，使 $t = \tan\theta$ 有定義。抽出 c^7 得 $(c + \mathrm{i}s)^7 = c^7(1 + \mathrm{i}t)^7$。利用 $\mathrm{i}^2 = -1$、$\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$、$\mathrm{i}^4 = 1$ 以及二項式係數（binomial coefficients）$1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1$，

$$(1 + \mathrm{i}t)^7 = (1 - 21t^2 + 35t^4 - 7t^6) + \mathrm{i}\,(7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7).$$

比較實部（real part）與虛部（imaginary part）（除 i 以外，所有量都是實數），

$$\cos 7\theta = \cos^7\theta\,(1 - 21t^2 + 35t^4 - 7t^6),$$
$$\sin 7\theta = \cos^7\theta\,(7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7).$$

兩式相除，因子 $\cos^7\theta$ 互相約去，再把分子和分母同乘以 -1，

$$\tan 7\theta = \frac{7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7}{1 - 21t^2 + 35t^4 - 7t^6} = \frac{t(t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7)}{7t^6 - 35t^4 + 21t^2 - 1},$$

這正是所求的結果。

為了稍後使用，留意上面兩行式子說明了甚麼。記 $N(t) = t(t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7)$ 及 $D(t) = 7t^6 - 35t^4 + 21t^2 - 1$。那麼 $\sin 7\theta = -\cos^7\theta\, N(t)$ 及 $\cos 7\theta = -\cos^7\theta\, D(t)$，所以當 $\cos\theta \neq 0$ 時，

$$\sin 7\theta = 0 \iff N(t) = 0, \qquad \cos 7\theta = 0 \iff D(t) = 0.$$

第 (i) 部分

取 $\theta = \frac{k\pi}{7}$，其中 $k = 1, 2, 3$。那麼 $\sin 7\theta = \sin k\pi = 0$ 而 $\cos\theta \neq 0$，所以 $N(\tan\theta) = 0$。此外，由於 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，故 $\tan\theta \neq 0$，因此可以約去因子 t：

$$t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7 = 0.$$

所以 $x = t^2$ 滿足

$$x^3 - 21x^2 + 35x - 7 = 0$$

其中 $x = \tan^2\frac{\pi}{7},\ \tan^2\frac{2\pi}{7},\ \tan^2\frac{3\pi}{7}$。

> ? **想一想** 我們怎樣知道這三個數就是全部的根（roots），而不是同一個根重複數了幾次？

角 $\frac{\pi}{7} < \frac{2\pi}{7} < \frac{3\pi}{7}$ 全都位於 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之內，而 tan 在這個區間上取正值且嚴格遞增（strictly increasing）。所以 $\tan^2$ 的三個值互不相同。三次多項式最多有三個根，因此這三個數恰好就是它的全部根，而這正是我們想要的三次多項式。

由韋達定理，各根之積為 7：

$$\tan^2\tfrac{\pi}{7}\ \tan^2\tfrac{2\pi}{7}\ \tan^2\tfrac{3\pi}{7} = 7.$$

每個角都位於 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之內，故每個正切值都是正數，所以我們取正平方根：

$$\tan\tfrac{\pi}{7}\ \tan\tfrac{2\pi}{7}\ \tan\tfrac{3\pi}{7} = \sqrt{7}.$$

第 (ii) 部分

現在取 $\theta = \frac{\pi}{14}, \frac{3\pi}{14}, \frac{5\pi}{14}$。那麼 $7\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$，所以 $\cos 7\theta = 0$，而 $\cos\theta \neq 0$。由上文的說明，$D(\tan\theta) = 0$，所以 $y = \tan^2\theta$ 滿足

$$7y^3 - 35y^2 + 21y - 1 = 0.$$

與第 (i) 部分一樣，這三個角都位於 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之內且互不相同，所以 $\tan^2\theta$ 的三個值互不相同，並且恰好就是這個三次多項式的全部根。由韋達定理，它們的和為 $\frac{35}{7}$：

$$\tan^2\tfrac{\pi}{14} + \tan^2\tfrac{3\pi}{14} + \tan^2\tfrac{5\pi}{14} = 5.$$

利用第 (i) 部分，還有一個快捷的做法。由於 $\frac{\pi}{14} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{7}$，同樣地 $\frac{3\pi}{14} = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{7}$ 及 $\frac{5\pi}{14} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}$，所求的和就是對第 (i) 部分那個三次多項式的各根 x_i 所取的 $\sum 1/x_i$。即

$$\frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = \frac{35}{7} = 5.$$

換句話說，在第 (i) 部分的三次方程中代入 $x = 1/y$ 並去分母，便得到第 (ii) 部分的三次方程。

驗算

- 代入 $t = 1$，即 $\theta = \frac{\pi}{4}$。公式給出 $\frac{1-21+35-7}{7-35+21-1} = \frac{8}{-8} = -1$，而事實上 $\tan\frac{7\pi}{4} = -1$。
- 當 θ 很小時，$\tan 7\theta \approx 7t$，而公式在一階近似下給出 $\frac{-7t}{-1} = 7t$。
- 數值上，$\tan\frac{\pi}{7}\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{7} \approx 0.4816 \times 1.2540 \times 4.3813 \approx 2.6458 \approx \sqrt{7}$，而 $\tan^2\frac{\pi}{14} + \tan^2\frac{3\pi}{14} + \tan^2\frac{5\pi}{14} \approx 0.0521 + 0.6360 + 4.3119 = 5.0000$。

常見錯誤

- 忘記說明三個值互不相同，因而未能確定它們真的是三次多項式的全部根。
- 在第 (i) 部分答 $\pm\sqrt{7}$：由於三個正切值都是正數，符號已經確定。
- 由 i 的冪引起的正負號錯誤：$\mathrm{i}^6 = -1$ 及 $\mathrm{i}^7 = -\mathrm{i}$。

STEP 之外

各數 $\tan^2\frac{k\pi}{7}$ 是共軛代數數（conjugate algebraic numbers）：它們是同一個整數係數不可約（irreducible）三次多項式的根，所以由它們組成的任何對稱式（symmetric expression）都是有理數。這就是伽羅瓦理論（Galois theory）的起點，該理論研究多項式各根之間的對稱性。同樣的技巧還能給出諸如 $\sum_{k=1}^{n}\cot^2\frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$ 的恆等式，$\sum 1/k^2 = \pi^2/6$ 的其中一個初等證明就用到它。想從幾何角度了解棣美弗定理和單位根（roots of unity），可參閱 Needham 的 *Visual Complex Analysis*；想找更多這類題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。