詳細解答

STEP III 1996，第 4 題

純數學 • 最大乘積分拆

> **STEP III 1996，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q4

關鍵思路

與其逐一搜尋 N 的所有拆分（splitting）方式，不如問：一個最優（optimal）拆分不可能包含甚麼？任何太大的部分都可以拆成兩塊而不令乘積（product）減少，而開首的不等式（inequality）所量度的正是這一點。等於 1 的部分是浪費，而太多的 2 則可以換成 3。經過這些調整之後，只剩下寥寥幾種形狀，而和 N 就從中選定一種。

解答

不等式

我們有

$$k \leq 2(k-2) \iff k \leq 2k-4 \iff k \geq 4.$$

所以滿足該不等式的整數是 $k = 4, 5, 6, \ldots$。此外，只有當 $k = 4$ 時等號才成立，而對於 $k \geq 5$，不等式是嚴格的：$k < 2(k-2)$。

最優拆分的模樣

固定 $N \geq 2$。把 N 寫成正整數之和的方式只有有限多種，所以最大乘積 $P(N)$ 存在。各部分的次序不影響和與乘積，所以我們把一個拆分視為由若干部分組成的一個集合。若一個拆分的乘積等於 $P(N)$，就稱它為最優拆分。我們提出三項觀察，每一項都會改動拆分，但保持其和等於 N。

(a) **沒有任何部分是 5 或以上**。若把一個部分 $m \geq 5$ 換成 2 和 $m-2$ 這兩個部分（兩者皆為正數），乘積就會乘以 $2(m-2)/m$，而根據不等式的嚴格形式，這個數大

於 1。所以含有部分 $m \geq 5$ 的拆分並非最優。

等於 4 的部分可以換成 $2+2$ 而乘積不變，因為 $2 \times 2 = 4$（即等號成立的情況 $k = 4$）。所以在最優拆分之中，必有一個沒有任何部分大於 3。由現在起，我們只考慮這樣的一個最優拆分。

(b) **沒有任何部分是** 1。由於 $N \geq 2$，一個等於 1 的部分不會是唯一的部分，所以還有另一個部分 a。把 1 和 a 這兩個部分換成單一個部分 $a+1$，和保持不變，而因數 $1 \times a = a$ 則變成 $a+1 > a$。這樣乘積就增大了，對最優拆分而言這是不可能的。

(c) **最多只有兩個部分是** 2。假如有三個 2，把 $2+2+2$ 換成 $3+3$ 就會把因數 8 變成 9，乘積同樣會增大。

所以必有一個最優拆分由 a 個 3 和 b 個 2 組成，其中 $b \in \{0,1,2\}$，並且

$$N = 3a + 2b, \qquad P(N) = 3^a\, 2^b.$$

想一想 會不會有兩組不同的 (a,b) 都配合同一個 N，以致我們仍然要比較兩者？

不會。取模（modulo）3 得 $2b \equiv N \pmod 3$，而 $b = 0,1,2$ 分別給出 $2b \equiv 0,2,1 \pmod 3$，是三個不同的餘數（residue）。所以 N 決定了 b，繼而 $a = (N-2b)/3$ 也隨之確定。因此

$$P(N) = \begin{cases} 3^{N/3} & \text{若} N \equiv 0 \pmod 3, \\ 2 \times 3^{(N-2)/3} & \text{若} N \equiv 2 \pmod 3, \\ 2^2 \times 3^{(N-4)/3} & \text{若} N \equiv 1 \pmod 3,\ N \geq 4. \end{cases}$$

$N = 5, \ldots, 9$ 時的值

把以上結果逐一應用於每個 N：

$$\begin{aligned} 5 &= 3+2, & P(5) &= 2 \times 3, \\ 6 &= 3+3, & P(6) &= 3^2, \\ 7 &= 3+2+2, & P(7) &= 2^2 \times 3, \\ 8 &= 3+3+2, & P(8) &= 2 \times 3^2, \\ 9 &= 3+3+3, & P(9) &= 3^3, \end{aligned}$$

正如所求。（當 $N = 7$ 時，拆分 $4+3$ 同樣是最優的，這就是為甚麼觀察 (a) 只容許我們把一個 4 換掉，而不能把它排除。）

求 $P(1000)$

由於 $1000 = 3 \times 332 + 4$，我們有 $1000 \equiv 1 \pmod 3$，所以 $b = 2$ 及 $a = (1000 - 4)/3 = 332$。最優拆分是 332 個 3 和兩個 2，並且

$$P(1000) = 2^2 \times 3^{332}.$$

換言之，最優拆分是 332 個 3 加兩個 2，或者 332 個 3 加一個 4。最優拆分就只有這些，因為 (a)–(c) 中的調整顯示，任何其他拆分都可以嚴格地改進。

驗算

- 對 N 的每一個拆分作窮舉搜尋，在 $N \le 40$ 的範圍內結果與公式吻合，包括題目給出的五個值。
- 利用 $P(n) = \max_{1 \le p \le n} p\,P(n-p)$ 以電腦作精確計算，得出 $P(1000) = 4 \times 3^{332}$，這是一個 160 位數。
- 作為合理性檢查，可與非整數的「拆分」比較：若分成 N/x 個相等的部分，乘積是 $x^{N/x}$，它在 $x = \mathrm{e} \approx 2.72$ 時最大。這就是為甚麼 3（以及偶爾出現的 2）會勝出。

常見錯誤

- 寫成 $1000 = 3 \times 333 + 1$ 並答 3^{333}：這個拆分含有一個 1，而 $3 + 1$ 應換成 $2 + 2$，因為 $4 > 3$。
- 聲稱部分 4「不可能出現」。它可以在最優拆分中出現；只是它永遠不會比 $2 + 2$ 更好。
- 只列出 $N = 5, \ldots, 9$ 時的值，卻沒有證明沒有其他拆分能勝過它們。正是關於結構的論證，才證明了這些值是最大的。

STEP 之外

這裏的論證是典型的*極端*（extremal）論證或*交換*（exchange）論證：先假設最優的對象存在，然後證明它必定不含某些局部模式。同樣的想法也出現於組合數學（combinatorics）、證明貪婪演算法（greedy algorithm）為最優的論證，以及整數分拆（integer partitions）的理論之中。其連續版本（求 $x^{N/x}$ 的最大值）是一道有趣的微積分練習。想做更多同類風格的題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*；至於同餘（congruence）與初等數論，可參閱 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。