詳細解答

STEP III 1996，第 3 題

純數學 • 半角代換

> **STEP III 1996，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q3

關鍵思路

被積函數（integrand）若由 $1/(\text{常數}+\text{常數}\cdot\cos x)$ 構成，正是使用半角代換（half-angle substitution）$t=\tan\frac{1}{2}x$ 的經典情形：這個代換能把任何關於 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的有理函數（rational function）化為 t 的有理函數。在本題中，它給出標準的 $\int \mathrm{d}t/(k^2+t^2)$，結果是一個反正切（inverse tangent）。其後兩個「由此」的結果，只需把各個被積函數重新調整比例，化成 $1/(1-a\cos x)$ 的形式，再選取 a 和 θ 即可。

解答

一般積分

設 $t=\tan\frac{1}{2}x$。當 x 由 0 變到 θ 時，t 由 0 變到 $T=\tan\frac{1}{2}\theta$，而由於 $0<\frac{1}{2}\theta<\frac{1}{2}\pi$，這個值是有限的正數。由標準的半角公式可得

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad \mathrm{d}x=\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

其中第二式是因為 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}(1+t^2)$。於是

$$1-a\cos x=\frac{(1+t^2)-a(1-t^2)}{1+t^2}=\frac{(1-a)+(1+a)t^2}{1+t^2},$$

所以 $1+t^2$ 這個因子互相約去，得

$$\int_0^{\theta}\frac{1}{1-a\cos x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{T}\frac{2}{(1-a)+(1+a)t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{1+a}\int_0^{T}\frac{1}{k^2+t^2}\,\mathrm{d}t,\qquad k^2=\frac{1-a}{1+a}.$$

由於 $-1<a<1$，$1-a$ 和 $1+a$ 都是正數，所以 $k=\sqrt{(1-a)/(1+a)}$ 確實是一個正實數。（這正是用到 a 的條件的地方：若 $|a|\geq 1$，分母可能等於零，積分便會成為瑕積

分（improper integral），又或者答案會是對數（logarithm）。）利用 $\int \mathrm{d}t/(k^2+t^2) = \frac{1}{k}\tan^{-1}(t/k)$，

$$\int_0^\theta \frac{1}{1-a\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(1+a)k}\tan^{-1}\frac{T}{k}.$$

最後，$(1+a)k = \sqrt{(1+a)^2}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} = \sqrt{1-a^2}$，所以

$$\boxed{\int_0^\theta \frac{1}{1-a\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\tan\tfrac{1}{2}\theta\right).}$$

想一想 為甚麼需要 $\theta < \pi$？

代換 $t = \tan\frac{1}{2}x$ 在 $x = \pi$ 處失效，因為那裏 t 會變成無限大。保持 $\theta < \pi$，整個範圍 $[0,\theta]$ 便會映到有限區間 $[0,\tan\frac{1}{2}\theta]$，公式亦無需特別處理。（令 $\theta \to \pi$ 可得 $\pi/\sqrt{1-a^2}$，因為 $\tan^{-1}$ 趨向 $\frac{1}{2}\pi$。）

第一個「由此」

抽出因子 2：

$$\frac{1}{2-a\cos x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}a\cos x}.$$

要使積分有限，我們需要 $-2 < a < 2$，這時 $b = \frac{1}{2}a$ 滿足 $-1 < b < 1$，所以可以套用一般結果，把 a 換成 b，並取 $\theta = \frac{1}{2}\pi$，此時 $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$：

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{1}{2-a\cos x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{1-\frac{1}{4}a^2}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}a}{1-\frac{1}{2}a}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{4-a^2}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{2+a}{2-a}},\end{aligned}$$

這是因為 $\sqrt{1-\frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}$，並把反正切內分數的分子和分母同時乘以二。這就是所要求的結果。

第二個「由此」

這次我們抽出 $\sqrt{2}$：

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos x},$$

所以我們取 $a=-\frac{1}{\sqrt{2}}$（它在 $(-1,1)$ 之內）和 $\theta=\frac{3}{4}\pi$（它在 $(0,\pi)$ 之內）。於是 $\sqrt{1-a^2}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，而

$$\frac{1+a}{1-a}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)^2,$$

這是把分子和分母同乘以 $\sqrt{2}-1$，並利用 $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$ 而得。所以該平方根等於 $\sqrt{2}-1$，而一般公式給出

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{\sqrt{2}+\cos x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{1/\sqrt{2}}\tan^{-1}\Big((\sqrt{2}-1)\tan\tfrac{3}{8}\pi\Big)=2\tan^{-1}\Big((\sqrt{2}-1)\tan\tfrac{3}{8}\pi\Big).$$

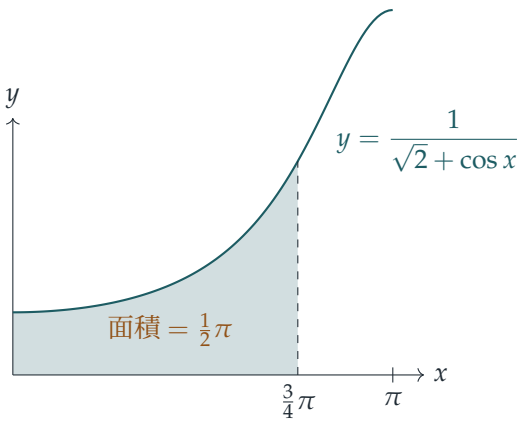
想一想 $\tan\frac{3}{8}\pi$ 等於甚麼？

設 $u=\tan\frac{1}{8}\pi>0$，並使用二倍角公式（double-angle formula）：$1=\tan\frac{1}{4}\pi=\dfrac{2u}{1-u^2}$，所以 $u^2+2u-1=0$，而 $u=\sqrt{2}-1$（取正根）。由於 $\frac{3}{8}\pi=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{8}\pi$，我們得到 $\tan\frac{3}{8}\pi=\cot\frac{1}{8}\pi=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$。

因此 $(\sqrt{2}-1)\tan\frac{3}{8}\pi=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$，而

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{\sqrt{2}+\cos x}\,\mathrm{d}x=2\tan^{-1}1=2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2},$$

正如所求。



驗算

- 取 $a=0$ 時，一般公式給出 $2\tan^{-1}(\tan\frac{1}{2}\theta)=\theta$，這正是 $\int_0^\theta 1\,\mathrm{d}x$。同樣地，在第一個「由此」中取 $a=0$，得到 $\frac{2}{2}\tan^{-1}1=\frac{1}{4}\pi=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x$。

- 把方框內的答案對 θ 求導，應該得回 $1/(1-a\cos\theta)$；這是練習鏈式法則（chain rule）的好題目。
- 對最後一個積分使用辛普森法則（Simpson's rule），得到 1.5707963…，與 $\frac{1}{2}\pi$ 吻合；另外，隨機選取數百組 a 和 θ 的值，一般公式和第一個「由此」的結果與辛普森法則的相差亦都在 10^{-10} 以內。

常見錯誤

- 把被積函數調整成 $1/(1-a\cos x)$ 的形式時，忘記了抽到外面的因子 $\frac{1}{2}$（或 $\frac{1}{\sqrt{2}}$）。
- 在最後一部分使用 $a=+\frac{1}{\sqrt{2}}$：$\sqrt{2}+\cos x$ 中的正負號表示 a 是負數。
- 弄錯了 k 的位置：答案是 $\frac{1}{k}\tan^{-1}(t/k)$，而不是 $\tan^{-1}(t/k)$ 或 $\frac{1}{k}\tan^{-1}(kt)$。

STEP 之外

代換 $t=\tan\frac{1}{2}x$（常稱為魏爾斯特拉斯代換（Weierstrass substitution））之所以有效，是因為它用有理函數把單位圓（unit circle）參數化，因而能把任何關於 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的有理函數化為 t 的有理函數，而後者總可以用部分分式（partial fractions）來積分。像 $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x/(1-a\cos x)=2\pi/\sqrt{1-a^2}$ 這類積分，也是複分析（complex analysis）中圍道積分（contour integration）的標準入門例子，當中由代換 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ 和留數定理（residue theorem）完成主要工作。想了解這個觀點，可參閱 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以圖像方式講解複分析的著作）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。