詳細解答

STEP III 1996，第 2 題

純數學 • 聯立線性方程

STEP III 1996，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/96-s3-q2

關鍵思路

三個未知數的三條線性方程（linear equations），除非係數的行列式（determinant）等於零，否則恰好有一個解。所以第一步是找出令行列式為零的 a 值；對於其餘所有 a，我們只需直接求解。這道題真正的內容在於那些例外的值：我們必須按 b 的取值，判斷方程組究竟是不相容（inconsistent），還是有無窮多個解。

解答

把各方程編號為

$$x + y + az = 2, \tag{1}$$
$$x + ay + z = 2, \tag{2}$$
$$2x + y + z = 2b. \tag{3}$$

何時有唯一解？

係數矩陣（coefficient matrix）的行列式為

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(a-1) - 1(1-2) + a(1-2a)$$
$$= 2a - 2a^2 = 2a(1-a).$$

所以當 $a \neq 0$ 且 $a \neq 1$ 時，不論 b 是甚麼，方程組都恰好有一個解。$a = 0$ 和 $a = 1$ 這兩種情況則須另行處理。

一般情況：$a \neq 0, 1$

由 (1) 減去 (2)，得

$$(1-a)y - (1-a)z = 0,$$

由於 $a \neq 1$，我們可以除以 $1-a$，得 $y = z$。把 $z = y$ 代入 (1) 和 (3)：

$$x + (1+a)y = 2, \qquad 2x + 2y = 2b, \text{ 即 } x + y = b.$$

由第一式減去第二式，得 $ay = 2 - b$，而由於 $a \neq 0$，

$$y = z = \frac{2-b}{a}, \qquad x = b - \frac{2-b}{a} = \frac{(a+1)b - 2}{a}.$$

代回 (1)、(2) 和 (3)，可確認這確實是一個解；而根據上面的論證，它是唯一的解。

$a = 0$ 的情況

方程組變成

$$x + y = 2, \qquad x + z = 2, \qquad 2x + y + z = 2b.$$

把首兩條方程相加，得 $2x + y + z = 4$。所以第三條方程的左方必須同時等於 4 和 $2b$。

> ? **想一想** 行列式為零，是否就代表「無解」？

單憑這一點並不足以斷定：它只表示這些方程是相依的（dependent），所以要麼它們互相矛盾，要麼其中一條沒有提供新的資訊。究竟是哪一種，取決於方程的右方，在這裏即取決於 b。

- 若 $b \neq 2$，則 $4 = 2b$ 不成立，所以**無解**。
- 若 $b = 2$，第三條方程只是首兩條方程之和，所以只剩下 $x + y = 2$ 和 $x + z = 2$。設 $x = t$，則解為

$$(x, y, z) = (t,\ 2 - t,\ 2 - t), \qquad t \text{ 為任意實數.}$$

$a = 1$ 的情況

這時 (1) 和 (2) 是同一條方程 $x + y + z = 2$，方程組變成

$$x + y + z = 2, \qquad 2x + y + z = 2b.$$

由第二式減去第一式，得 $x = 2b - 2$，於是 $y + z = 2 - x = 4 - 2b$。這兩條方程永遠不會互相矛盾，所以對於每一個 b 值，都有無窮多個解：

$$(x, y, z) = (2b - 2,\ s,\ 4 - 2b - s), \qquad s \text{ 為任意實數.}$$

總結

- $a \neq 0, 1$：唯一解為 $x = \dfrac{(a+1)b-2}{a}$，$y = z = \dfrac{2-b}{a}$。
- $a = 0$，$b \neq 2$：無解。
- $a = 0$，$b = 2$：$(t,\ 2-t,\ 2-t)$，其中 t 為任意數。
- $a = 1$，b 為任意數：$(2b-2,\ s,\ 4-2b-s)$，其中 s 為任意數。

驗算

取 $a = 2$，$b = 4$：公式給出 $y = z = -1$ 和 $x = 5$，而確實有 $5-1-2 = 2$、$5-2-1 = 2$ 和 $10-1-1 = 8 = 2b$。再從結構上檢查：一般公式的分母含有 a，所以它在 $a = 0$ 時必定失效；事實正是如此，而我們另外所作的分析說明了原因。在 $a = 1$ 時，公式仍然有意義，給出 $(2b-2,\ 2-b,\ 2-b)$，這正是我們那族解中 $s = 2-b$ 的一員：它只是眾多解之一，因為 $y = z$ 不再是必然的。我們以精確的有理數運算，對大量隨機選取的 a、b 和參數值驗證了所有情況。

常見錯誤

- 除以 $1-a$ 或 a 時，沒有說明 $a \neq 1$ 或 $a \neq 0$。這些除法正是特殊情況藏身之處。
- 以為行列式為零就代表無解。當 $a = 1$ 時，總有無窮多個解；而當 $a = 0$ 時，若 $b = 2$ 也有解。
- 忘記明確寫出無窮多個解的通式：只說「有無窮多個解」，並不等於解出了方程。

STEP 之外

每條方程都描述三維空間中的一個平面，而這道題問的是三個平面可以怎樣相交：交於一點、交於一條公共直線，或者完全沒有公共點（當 $a = 0$，$b \neq 2$ 時，三個平面兩兩相交於三條平行直線，就像稜柱的各個面一樣）。有系統的工具是高斯消去法（Gaussian elimination）和矩陣的秩（rank）這個概念：一個方程組相容，當且僅當把右方的常數項添加到矩陣之後，秩沒有增加。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）把這幅圖景闡述得十分精彩。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。