詳細解答

STEP III 1996，第 14 題

概率與統計 • 兩狀態馬可夫過程

> **STEP III 1996，第 14 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q14

關鍵思路

把時間切成長度為 δt 的極短區間，然後問：在其中一個區間內可能發生甚麼事？各區間的期望次數可憑期望值的線性性質（linearity of expectation）相加，而正在補胎的概率則符合一個簡單的「流入減流出」平衡關係；當 $\delta t \to 0$ 時，這個關係就變成一條一階線性微分方程（first-order linear differential equation）。一旦求得 $p(t)$，期望補胎時間就是它的積分。

解答

爆胎次數的期望值

只有實際踏單車的時間才會發生爆胎，而我在踏單車時一切正常。把踏單車的總時間 T 分成 n 小段，每段長度為 $\delta t = T/n$。設 X_k 為第 k 段內的爆胎次數；準確至 δt 的一階，X_k 以概率 $\alpha\,\delta t$ 取值 1，否則取值 0，所以 $\mathrm{E}(X_k) = \alpha\,\delta t$。根據期望值的線性性質（毋須假設獨立），

$$\mathrm{E}(\text{爆胎次數}) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(X_k) = n\alpha\,\delta t = \alpha T.$$

補胎所花的時間並不計算在內，因為這裏的時鐘只計踏單車的時間。

$p(t)$ 所滿足的方程

現在設 t 為真實（時鐘）時間，包括補胎的時間。在時刻 t，我若非正在補胎（概率為 $p(t)$），就是正在踏單車（概率為 $1 - p(t)$）。我在時刻 $t + \delta t$ 正在補胎，當且僅當以下其中一種情況出現：

- 我在時刻 t 正在補胎，而補胎在 $(t, t+\delta t)$ 內沒有完成：概率為 $p(t)(1-\beta\,\delta t)$；或
- 我在時刻 t 正在踏單車，並在 $(t, t+\delta t)$ 內爆胎：概率為 $(1-p(t))\,\alpha\,\delta t$。

這兩種情況互斥，所以，略去 $(\delta t)^2$ 階的項（即在同一個極短區間內發生兩件事），

$$p(t+\delta t) = p(t)(1-\beta\,\delta t) + \big(1-p(t)\big)\alpha\,\delta t.$$

整理後得

$$\frac{p(t+\delta t)-p(t)}{\delta t} = \alpha - (\alpha+\beta)\,p(t),$$

令 $\delta t \to 0$，即得

$$p'(t) = \alpha - (\alpha+\beta)\,p(t).$$

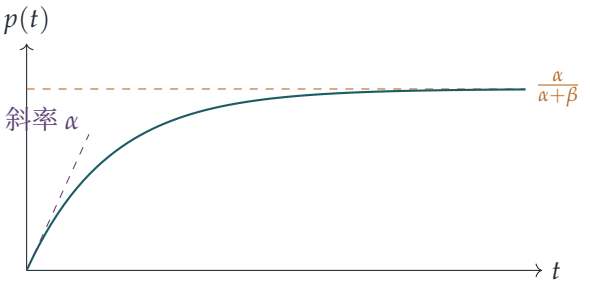
出發時單車狀態良好，所以初始條件（initial condition）是 $p(0)=0$。

驗證題目給出的解

對於 $p(t) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\big(1-\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}\big)$，我們有 $p(0) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-1) = 0$，並且

$$\begin{aligned} p'(t) &= \alpha\,\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}, \\ \alpha - (\alpha+\beta)p(t) &= \alpha - \alpha\big(1-\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}\big) = \alpha\,\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}. \end{aligned}$$

兩者相等，所以 p 同時滿足微分方程和初始條件，正如所求。



圖中可見 p 由 0 開始，以初始斜率 α 上升，並趨向長期水平 $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$。

期望補胎時間

設 R 為在 $[0,T]$ 期間用於補胎的時間，並設 $I(t)$ 在我於時刻 t 正在補胎時取值 1，否則取值 0，於是 $R = \int_0^T I(t)\,\mathrm{d}t$。由於 $\mathrm{E}(I(t)) = p(t)$，取期望值（同樣只是線性性質，把

積分看成各小區間上求和的極限）便得

$$\mathrm{E}(R) = \int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left[t + \frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}}{\alpha+\beta}\right]_0^T$$
$$= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(T - \frac{1-\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)T}}{\alpha+\beta}\right).$$

想一想 為甚麼補胎時間的期望值會等於一個概率的積分？

在每個小區間 $(t, t+\delta t)$ 內，用於補胎的時間以概率 $p(t)$ 約為 δt，否則為 0，所以它的期望值是 $p(t)\,\delta t$。把所有區間加起來，便得 $\sum p(t)\,\delta t \to \int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t$。

兩個近似

記 $x = (\alpha+\beta)T$。旅程中用於補胎的時間所佔比例的期望值是

$$F = \frac{\mathrm{E}(R)}{T} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(1 - \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\right).$$

x 很小。利用 $\mathrm{e}^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \cdots$，可得 $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} = 1 - \frac{1}{2}x + O(x^2)$，所以

$$F \approx \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{x}{2} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{(\alpha+\beta)T}{2} = \frac{\alpha T}{2}.$$

這是合理的：在短途旅程中 $p(t) \approx \alpha t$，它在 $[0, T]$ 上的平均值正是 $\alpha T/2$。

x 很大。這時 $0 < \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} < \dfrac{1}{x}$，而後者很小，所以

$$F \approx \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

在長途旅程中，$p(t)$ 幾乎在所有時間都已穩定在平衡值 $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$。

驗算

- 平衡狀態：令 $p' = 0$，得 $\alpha(1-p) = \beta p$，即「流入率等於流出率」，所以 $p = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$，與 T 很大時的極限吻合。
- 若 $\beta \to \infty$（補胎瞬間完成），一切與補胎有關的量都趨向 0，理應如此。
- 取 $\alpha = 0.7$、$\beta = 2.3$、$T = 2.5$，公式給出 $\mathrm{E}(R) \approx 0.5056$。模擬 2×10^5 次旅程（踏單車與補胎的時段交替出現，長度均服從指數分佈）所得結果為 0.5058；而模擬在踏單車時間 2.5 內的爆胎次數，平均值為 $1.750 = \alpha T$。

常見錯誤

- 在爆胎一項漏掉因子 $(1-p(t))$：只有正在踏單車時才會爆胎。
- 取 $p(0)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$，或沒有寫明初始條件；單車出發時狀態良好，所以 $p(0)=0$。
- 在 x 很小時的展開式中漏掉二階項，結果得出 $F\approx 0$ 而非 $\alpha T/2$。

STEP 之外

這是一條兩狀態的連續時間馬可夫鏈（continuous-time Markov chain）：單車以速率 α 和 β 在「運作正常」與「正在修補」兩個狀態之間來回轉換，而 p 所滿足的方程正是柯爾莫哥洛夫（Kolmogorov）前向方程最簡單的情形。同一個模型也可用來描述會發生故障並獲維修的機器、離子通道的開合，以及排隊論（queueing theory）中的許多內容。以踏單車時間計算的爆胎次數，是一個速率為 α 的泊松過程（Poisson process）。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）以恰到好處的程度講解泊松過程和馬可夫鏈。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。