詳細解答

STEP III 1996，第 11 題

力學 • 微小振動

> **STEP III 1996，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q11

關鍵思路

整道題靠兩個圓幾何的事實。AC 是直徑，所以角 ABC 是直角。由此可得兩條弦線的長度，從而以 θ 表示兩個張力（tension）。另外，圓心角是圓周角的兩倍，所以 B 繞圓心轉過了 2θ。因此它由 C 起計的弧長是 $2a\theta$，再沿切線方向應用牛頓第二定律（Newton's second law），便得到運動方程（equation of motion）。至於振動，則在平衡位置（equilibrium）附近作線性化（linearise）。

動筆之前先提醒一點：題目印出的方程中有 $mg\sin\theta$，其實應該是 $mg\sin 2\theta$。下面的推導會說明原因，而且只有修正後的方程才能得出題目所述的 $5\lambda = 24mg$ 和所述的周期。

解答

運動方程

模型。小環 B 是光滑金屬線上一個質量為 m 的質點（particle），所以金屬線只施加沿半徑方向的法向反作用力（normal reaction）R。兩條弦線都是輕而有彈性的，並且遵從胡克定律（Hooke's law）：自然長度為 a 的弦線被拉長至長度 ℓ 時，張力為 $\lambda(\ell - a)/a$。

幾何。由於 AC 是直徑（長度為 $2a$），由半圓上的圓周角可知 $\angle ABC = 90°$。在直角三角形 ABC 中，

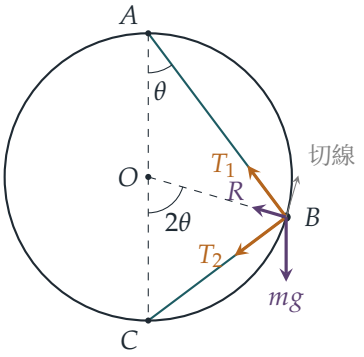
$$AB = 2a\cos\theta, \qquad CB = 2a\sin\theta.$$

圓周角 $\angle CAB = \theta$ 所對的弧是 CB，所以圓心角是 $\angle COB = 2\theta$。由 C 到 B 的弧長是 $s = 2a\theta$，所以 B 沿金屬線、朝 θ 增加的方向（即朝向 A）的加速度是 $\ddot{s} = 2a\ddot{\theta}$。

張力。BA 和 BC 的張力分別是

$$T_1 = \lambda\,\frac{2a\cos\theta - a}{a} = \lambda(2\cos\theta - 1), \qquad T_2 = \lambda(2\sin\theta - 1).$$

兩條弦線同時拉緊，當且僅當 $\cos\theta > \frac{1}{2}$ 及 $\sin\theta > \frac{1}{2}$，即 $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3}$。



沿 B 點的切線方向分解。切線與 OB 垂直，而 R 在切線方向沒有分量。

- 三角形 OAB 是等腰三角形（$OA = OB = a$），所以 $\angle OBA = \angle OAB = \theta$。因此 BA 與切線的夾角是 $90° - \theta$，而 T_1 的貢獻是朝向 A 的 $T_1\sin\theta$。
- 三角形 OCB 是等腰三角形，而 $\angle OCB = \angle ACB = 90° - \theta$，所以 $\angle OBC = 90° - \theta$。因此 BC 與切線的夾角是 θ，而 T_2 的貢獻是背向 A 的 $T_2\cos\theta$。
- OB 與向下的鉛垂線的夾角是 2θ，所以切線與水平線的夾角是 2θ。重力的貢獻是背向 A 的 $mg\sin 2\theta$。

沿切線方向應用牛頓第二定律，得

$$\begin{aligned} 2ma\ddot{\theta} &= \lambda(2\cos\theta - 1)\sin\theta - \lambda(2\sin\theta - 1)\cos\theta - mg\sin 2\theta \\ &= \lambda(\cos\theta - \sin\theta) - mg\sin 2\theta, \end{aligned}$$

因為兩個 $2\lambda\sin\theta\cos\theta$ 項互相抵消。這就是所求的方程，只是重力項是 $mg\sin 2\theta$，而不是題目印出的 $mg\sin\theta$。

想一想 題目印出的 $mg\sin\theta$ 會不會其實才是對的？

不會。當 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 時，小環與 O 同高，切線是鉛垂的，整個重量 mg 都沿金屬線方向作用。這樣 $mg\sin 2\theta = mg$，但 $mg\sin\theta = mg/\sqrt{2}$。下一部分同樣可以作出判斷：按題目印出的方程，平衡時會得到 $\lambda = 3mg$，而不是 $\frac{24}{5}mg$。

平衡位置

當 $\sin\theta = \frac{3}{5}$ 時，$\cos\theta = \frac{4}{5}$（取 θ 為銳角），而且 θ 在弦線拉緊的範圍之內，因為 $\frac{3}{5} > \frac{1}{2}$ 及 $\frac{4}{5} > \frac{1}{2}$。設 $\ddot{\theta} = 0$：

$$\lambda\left(\tfrac{4}{5} - \tfrac{3}{5}\right) = mg \cdot 2 \cdot \tfrac{3}{5} \cdot \tfrac{4}{5} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\lambda}{5} = \frac{24mg}{25} \quad \Longrightarrow \quad 5\lambda = 24mg,$$

正如所求。

小幅振動

設 $f(\theta) = \lambda(\cos\theta - \sin\theta) - mg\sin 2\theta$，於是 $2ma\ddot{\theta} = f(\theta)$，而在平衡位置 θ_0 有 $f(\theta_0) = 0$。令 $\theta = \theta_0 + \varepsilon$，其中 ε 很小。準確至一階，$f(\theta_0 + \varepsilon) \approx f'(\theta_0)\,\varepsilon$，其中

$$\begin{aligned} f'(\theta_0) &= -\lambda(\sin\theta_0 + \cos\theta_0) - 2mg\cos 2\theta_0 \\ &= -\tfrac{24}{5}mg \cdot \tfrac{7}{5} - 2mg\left(\tfrac{16}{25} - \tfrac{9}{25}\right) = -\tfrac{168}{25}mg - \tfrac{14}{25}mg = -\tfrac{182}{25}mg. \end{aligned}$$

所以

$$2ma\ddot{\varepsilon} = -\tfrac{182}{25}mg\,\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \ddot{\varepsilon} = -\frac{91g}{25a}\,\varepsilon.$$

這是簡諧運動（simple harmonic motion），其中 $\omega^2 = \dfrac{91g}{25a}$。由於 $f'(\theta_0) < 0$，這個平衡是穩定的（stable）。位移很小，所以弦線一直保持拉緊（θ 始終在 θ_0 附近，遠在 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ 的邊界之內）。周期約為

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot 5\sqrt{\frac{a}{91g}} = 10\pi\sqrt{\frac{a}{91g}}.$$

驗算

- 當 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 時，兩條弦線的伸長量相同，所以它們在切線方向的作用互相抵消（$\cos\theta - \sin\theta = 0$），而整個重量沿鉛垂的切線作用。我們的方程給出 $2ma\ddot{\theta} = -mg$，這是正確的。
- 取 $a = g = m = 1$ 及 $\lambda = 4.8$，我們用位置向量計算了切向力。它在 $\sin\theta = 0.6$ 時為零。由一個小位移開始以數值方法逐步計算運動，得到周期為 3.29328，與 $10\pi/\sqrt{91} \approx 3.29328$ 吻合。

常見錯誤

- 把弧長當作 $a\theta$。小環繞圓心轉過的是 2θ，而不是 θ，所以它的切向加速度是 $2a\ddot{\theta}$。左邊的 2 就是這樣來的。

- 沿弦的方向分解，而不是沿切線方向分解。反作用力是未知的，所以應沿切線方向分解，把它消去。

STEP 之外

在平衡位置附近作線性化，$\ddot{x} = f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0)$，是非線性系統穩定性分析的第一步。當 $f'(x_0) < 0$ 時，它給出穩定性，以及 $\omega^2 = -f'(x_0)$ 的簡諧運動。在大學裏，這個方法會透過簡正模式（normal modes）和矩陣的特徵值（eigenvalues）推廣到多個自由度（degrees of freedom）的情況。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）是進一步閱讀的好選擇。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。