詳細解答

STEP III 1996，第 10 題

力學 • 涉及摩擦力的平衡

STEP III 1996，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/96-s3-q10

關鍵思路

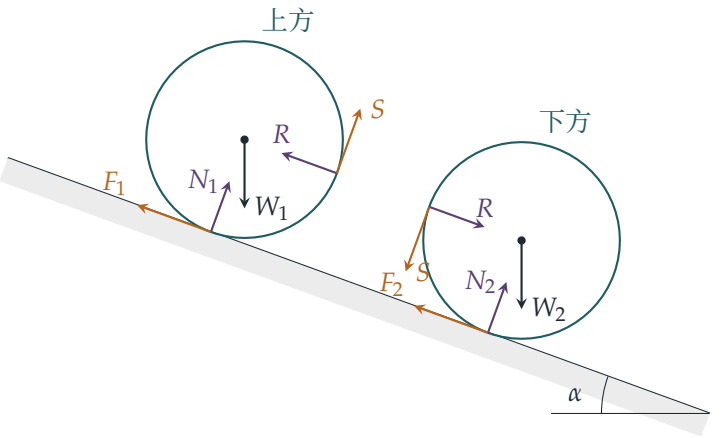
寫出六條平衡方程（每個圓柱體各有兩條分解力的方程和一條力矩方程），你會發現它們唯一地確定了每一個接觸力。力矩方程正是關鍵所在：每個圓柱體只有兩個摩擦力對其中心有力矩，所以這兩個摩擦力的大小必定相等。之後，四個不等式中的每一個，都不過是三條接觸線之一上的「摩擦力 $\leq$ 摩擦系數 $\times$ 法向反作用力」，再加上兩個圓柱體之間的推力不能為負這個條件。

解答

模型。每個圓柱體都是半徑為 a 的均勻剛體（uniform rigid body），所以其重量作用於中心（即軸上）。我們在通過兩個中心的鉛垂截面上考慮問題。由於兩個半徑相等，而且兩個圓柱體都放在斜面上，所以連心線與斜面平行，而兩個圓柱體之間的接觸點就是該線段的中點。取 x 方向為沿斜面向下，y 方向垂直於斜面並指向斜面之外。

定義以下各力（所有分量最終都可能是正或負）：

- N_1、N_2：斜面對上方和下方圓柱體的法向反作用力（normal reaction）；
- F_1、F_2：斜面對它們的摩擦力（frictional force），以沿斜面向上為正；
- R：兩個圓柱體之間的法向力，沿連心線方向，把下方圓柱體推向斜面下方，把上方圓柱體推向斜面上方；
- S：兩個圓柱體之間的摩擦力，垂直於斜面，對上方圓柱體的作用方向是遠離斜面，因而對下方圓柱體的作用方向是指向斜面（根據牛頓第三定律（Newton's third law））。



（為清楚起見，圖中把兩個圓柱體分開來畫；R 和 S 其實作用於同一條接觸線上。每個重量都通過中心鉛垂向下作用。）

力矩。對每個圓柱體的中心取力矩（moment）。法向力 N_1、N_2、R 和重量全都通過中心，所以只有摩擦力才有力矩。每個摩擦力都在距離中心 a 之處沿切線方向作用。對上方圓柱體而言，F_1（沿斜面向上，作用於圓柱體底部）和 S（遠離斜面，作用於其下坡一側）的力矩方向相反，由此得

$$aF_1 = aS, \qquad \text{所以} \qquad F_1 = S.$$

同樣地，對下方圓柱體而言，F_2（沿斜面向上，作用於其底部）和 S（指向斜面，作用於其上坡一側）的力矩方向相反，所以 $F_2 = S$。因此

$$F_1 = F_2 = S.$$

想一想 為甚麼斜面對每個圓柱體的摩擦力，必定等於兩個圓柱體之間的摩擦力？

因為一個可以自由滾動的圓柱體，只有在繞其軸的力偶（couple）互相抵消時才能保持平衡，而摩擦力是唯一對軸有力矩的力。你可以檢查一下轉向：對上方圓柱體而言，斜面在底部施加的沿斜面向上的摩擦力會令它向下坡方向滾動，即在圖中順時針轉動，而作用於其下坡一側的向上摩擦力則令它逆時針轉動。

分解力。平行於斜面（以沿斜面向下為正）：

$$\begin{aligned} \text{上方：} \quad & W_1 \sin\alpha - F_1 - R = 0, \\ \text{下方：} \quad & W_2 \sin\alpha - F_2 + R = 0. \end{aligned}$$

兩式相加，並利用 $F_1 = F_2 = S$，得

$$F_1 = F_2 = S = \tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha,$$

這正是重量沿斜面向下的總分量的一半，與預期相符。兩式相減則得

$$R = \tfrac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha.$$

垂直於斜面（以向外為正）：

$$\begin{aligned} \text{上方：}\quad & N_1 - W_1\cos\alpha + S = 0 \quad \Longrightarrow \quad N_1 = W_1\cos\alpha - \tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha, \\ \text{下方：}\quad & N_2 - W_2\cos\alpha - S = 0 \quad \Longrightarrow \quad N_2 = W_2\cos\alpha + \tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha. \end{aligned}$$

於是六條方程確定了全部六個力。平衡（equilibrium）可以成立，當且僅當這些力在物理上是容許的：每個法向反作用力都非負，而每個摩擦力都不超過摩擦系數（coefficient of friction）乘以相應的法向反作用力。

第 (i) 部分

兩個圓柱體只能互相推壓，所以 $R \geq 0$。由於 $\sin\alpha > 0$，由此得 $W_1 \geq W_2$。

第 (ii) 部分

在兩個圓柱體的接觸處，我們需要 $S \leq \mu R$：

$$\tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha \leq \mu \cdot \tfrac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha.$$

左邊嚴格為正，所以必須有 $R > 0$，即 $W_1 > W_2$（兩個重量相等其實是不可能的）。兩邊除以正數 $\frac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha$，得

$$\mu \geq \frac{W_1 + W_2}{W_1 - W_2},$$

正如所求。

第 (iii) 部分

在上方圓柱體與斜面的接觸處，我們需要 $N_1 \geq 0$ 和 $F_1 \leq \mu_1 N_1$。由於 $F_1 > 0$，第二個條件已經迫使 $N_1 > 0$。把 $F_1 \leq \mu_1 N_1$ 兩邊除以 $\frac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha > 0$：

$$1 \leq \mu_1\left(\frac{2W_1\cos\alpha}{(W_1 + W_2)\sin\alpha} - 1\right) = \mu_1\left(\frac{2W_1\cot\alpha}{W_1 + W_2} - 1\right).$$

括號內的式子是 $N_1 / \left(\frac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha\right)$，它是正數，所以我們可以用它來除：

$$\mu_1 \geq \left(\frac{2W_1\cot\alpha}{W_1 + W_2} - 1\right)^{-1}.$$

（平衡還需要括號內的式子為正，即 $\tan\alpha < 2W_1/(W_1 + W_2)$；否則上方圓柱體會被抬離斜面。）

關於 μ_2 的不等式

這裏 $N_2 = W_2\cos\alpha + \frac{1}{2}(W_1+W_2)\sin\alpha$ 自動為正，而 $F_2 \le \mu_2 N_2$ 在除以 $\frac{1}{2}(W_1+W_2)\sin\alpha$ 之後變成

$$1 \le \mu_2\left(\frac{2W_2\cot\alpha}{W_1+W_2}+1\right), \qquad \text{即} \qquad \mu_2 \ge \left(\frac{2W_2\cot\alpha}{W_1+W_2}+1\right)^{-1}.$$

? **想一想** 為甚麼下方圓柱體的符號是 $+1$，而上方圓柱體的卻是 -1？

兩個圓柱體之間的摩擦力 S 把上方圓柱體拉離斜面，並把下方圓柱體壓向斜面。所以斜面對上方圓柱體的壓力較小，對下方圓柱體的壓力較大，而上方圓柱體就需要較大的摩擦力與法向反作用力之比。

驗算

- 把兩個圓柱體的方程相加，便得到整個系統的方程：斜面的總摩擦力為沿斜面向上的 $(W_1+W_2)\sin\alpha$，總法向反作用力為 $(W_1+W_2)\cos\alpha$，與單一剛性方塊的情況完全一樣。
- 當 $\alpha \to 0$ 時，所有摩擦力和 R 都趨向 0，而 μ_1, μ_2 的兩個下界也趨向 0，這正是水平地面上應有的情況。
- 數值上，取 $W_1 = 3$、$W_2 = 1$、$\alpha = 20°$：直接解六條方程得 $R \approx 0.342$、$S = F_1 = F_2 \approx 0.684$、$N_1 \approx 2.135$、$N_2 \approx 1.624$，所以 $\mu \ge 2$、$\mu_1 \ge 0.320$ 和 $\mu_2 \ge 0.421$，與公式吻合。我們也對 W_1、W_2 和 α 的許多隨機取值作了同樣的檢查，結果同樣吻合。

常見錯誤

- 忘記力矩方程。沒有它們，就有六個未知數而只有四條方程，問題看起來便無法確定。
- 弄錯兩個圓柱體之間摩擦力的方向，這會把最後兩個答案中的 ±1 對調。
- 忽略了較輕的圓柱體必須在下方：假如上方圓柱體較輕，R 就必須為負。

STEP 之外

這是一個靜定（statically determinate）系統：平衡方程確定了每一個力，所以摩擦定律就變成可以檢驗的條件。當接觸點的數目多於方程的數目時（例如一把梯子靠在粗糙的牆上並立於粗糙的地面），系統便是靜不定（statically indeterminate）的，單靠剛體靜

力學無法說明各力如何分擔。這時工程師便會引入物體的彈性（elasticity）。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）仔細講解了剛體平衡和力矩（torque）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。