詳細解答

STEP III 1996，第 1 題

純數學 • 雙曲函數的冪

> **STEP III 1996，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q1

關鍵思路

把雙曲函數（hyperbolic functions）寫成指數函數，一切便隨之而來。冪 $\cosh^n x$ 變成 $2^{-n}(e^x + e^{-x})^n$，再用二項式定理（binomial theorem）展開成指數函數 $e^{(n-2r)x}$；這些項會成對出現，即 $e^{\pm jx}$，而每一對就是一個 $\cosh jx$。$\sinh^{2m} x$ 的同類展開式只差在正負號交替，所以相加或相減時，每隔一項便會消去。

解答

定義與兩條恆等式

我們定義

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

由此立即得到兩個結果。由於 $\cosh x + \sinh x = e^x$ 及 $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$，

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = (\cosh x + \sinh x)(\cosh x - \sinh x) = e^x e^{-x} = 1.$$

把定義式平方，得 $\cosh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})$ 及 $\sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x})$，所以

$$\cosh^2 x + \sinh^2 x = \tfrac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) = \cosh 2x,$$

再與恆等式（identity）$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ 相加或相減，得

$$\cosh^2 x = \tfrac{1}{2}(\cosh 2x + 1), \qquad \sinh^2 x = \tfrac{1}{2}(\cosh 2x - 1).$$

最後這兩條式子對任何自變量都成立，所以我們可以把當中的 x 換成 $2x$。

現在把平方差（difference of squares）因式分解：

$$\cosh^4 x - \sinh^4 x = (\cosh^2 x - \sinh^2 x)(\cosh^2 x + \sinh^2 x) = 1 \cdot \cosh 2x = \cosh 2x,$$

這正是所求。至於兩者之和，先配方（complete the square），再利用 $\cosh x \sinh x = \frac{1}{4}(e^{2x} - e^{-2x}) = \frac{1}{2}\sinh 2x$：

$$\begin{aligned}\cosh^4 x + \sinh^4 x &= (\cosh^2 x + \sinh^2 x)^2 - 2\cosh^2 x \sinh^2 x \\ &= \cosh^2 2x - \tfrac{1}{2}\sinh^2 2x \\ &= \tfrac{1}{2}(\cosh 4x + 1) - \tfrac{1}{4}(\cosh 4x - 1) \\ &= \tfrac{1}{4}\cosh 4x + \tfrac{3}{4},\end{aligned}$$

這就是第二條恆等式。

係數 a_k

根據二項式定理，

$$\cosh^n x = \frac{1}{2^n}\left(e^x + e^{-x}\right)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}e^{(n-2r)x}.$$

把下標為 r 的項與下標為 $n-r$ 的項配成一對。由於 $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$，兩者的係數（coefficient）相同，而指數則互為相反數 $\pm(n-2r)x$，所以兩項合起來就是 $2\binom{n}{r}\cosh((n-2r)x)$。

想一想 究竟哪些 $\cosh kx$ 會真正出現？中間項又會怎樣？

指數 $n-2r$ 依次為 $n, n-2, n-4, \ldots$，所以只有與 n 奇偶性（parity）相同的 k 才會出現。設 $k = n-2r$，則當 $1 \le k \le n$ 時，$\cosh kx$ 的係數為 $2\cdot 2^{-n}\binom{n}{r}$，其中 $r = \frac{1}{2}(n-k)$。當 n 為偶數時，還有一個沒有配對的中間項 $r = \frac{n}{2}$，給出常數 $2^{-n}\binom{n}{n/2}$。因此

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n-1}}\dbinom{n}{\frac{1}{2}(n-k)} & \text{若} 1 \le k \le n \text{ 且} n-k \text{ 為偶數}, \\ 0 & \text{若} n-k \text{ 為奇數}, \end{cases} \qquad a_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{\frac{1}{2}n} & n \text{ 為偶數}, \\ 0 & n \text{ 為奇數}. \end{cases}$$

例如，$\cosh^5 x = \frac{5}{8}\cosh x + \frac{5}{16}\cosh 3x + \frac{1}{16}\cosh 5x$。

最後部分

取 $n = 2m$，以同樣方法展開 $\sinh^{2m} x$：

$$\sinh^{2m} x = \frac{1}{2^{2m}}\sum_{r=0}^{2m}(-1)^r\binom{2m}{r}e^{(2m-2r)x}.$$

由於 $(-1)^{2m-r} = (-1)^r$，第 r 項與第 $2m-r$ 項仍然可以配對，所以

$$\sinh^{2m} x = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{r=0}^{2m} (-1)^r \binom{2m}{r} \cosh(2(m-r)x),$$

這就是 $\cosh^{2m} x$ 的展開式（以同樣形式寫出，並利用 cosh 是偶函數）加上交替的正負號。相減及相加，得

$$\cosh^{2m} x \mp \sinh^{2m} x = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{r=0}^{2m} (1 \mp (-1)^r) \binom{2m}{r} \cosh(2(m-r)x).$$

所以兩者之差只保留 r 為奇數的項（每項都變成兩倍），兩者之和則只保留 r 為偶數的項。像之前一樣把 r 與 $2m-r$ 兩項合併，並設 $k = 2j = 2(m-r)$，便得到

$$\cosh^{2m} x - \sinh^{2m} x = b_0 + \sum_{\substack{1 \le j \le m \\ m-j \text{ 為奇數}}} \frac{1}{2^{2m-2}} \binom{2m}{m-j} \cosh 2jx,$$

$$\cosh^{2m} x + \sinh^{2m} x = c_0 + \sum_{\substack{1 \le j \le m \\ m-j \text{ 為偶數}}} \frac{1}{2^{2m-2}} \binom{2m}{m-j} \cosh 2jx,$$

其中常數項來自沒有配對的中間項 $r = m$：當 m 為奇數時，它保留在差之中；當 m 為偶數時，它保留在和之中：

$$b_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{2m-1}} \binom{2m}{m} & m \text{ 為奇數}, \\ 0 & m \text{ 為偶數}, \end{cases} \qquad c_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{2m-1}} \binom{2m}{m} & m \text{ 為偶數}, \\ 0 & m \text{ 為奇數}. \end{cases}$$

用文字來說：當 k 為奇數時，$\cosh kx$ 的係數為 0。當 $k = 2j \ge 2$ 為偶數時，若 $m-j$ 為奇數，則它在差之中的係數為 $2^{2-2m}\binom{2m}{m-j}$；若 $m-j$ 為偶數，則它在和之中的係數為此值；其餘情況係數均為 0。取 $m = 2$，差為 $\frac{1}{4}\binom{4}{1}\cosh 2x = \cosh 2x$，而和為 $\frac{1}{8}\binom{4}{2} + \frac{1}{4}\binom{4}{0}\cosh 4x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cosh 4x$，正好重現我們最初證明的兩條恆等式。

驗算

代入 $x = 0$：每個 $\cosh kx$ 都變成 1，所以各 a_k 之和必須等於 1（確實如此：二項式係數之和為 2^n），而最後兩條展開式的係數之和也必須等於 1。當 $m = 3$ 時，公式給出 $\cosh^6 x - \sinh^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cosh 4x$ 及 $\cosh^6 x + \sinh^6 x = \frac{15}{16}\cosh 2x + \frac{1}{16}\cosh 6x$。在 $x = 1$ 處，第一條式子的兩邊準確至四位有效數字均為 10.87，用計算機可以核實。我們已就 $n \le 12$ 及 $m \le 8$，在隨機選取的 x 值處以數值方法驗證了所有公式。

常見錯誤

- 把中間項加倍：當 n 為偶數時，$r = \frac{n}{2}$ 的一項沒有配對的伙伴，所以 a_0 是 $2^{-n}\binom{n}{n/2}$，而不是它的兩倍。
- 忘記了只要 k 與 n 的奇偶性相反，就有 $a_k = 0$。
- 以為最後部分必定有常數項。其實常數項只在 m 為奇數時出現於差之中，只在 m 為偶數時出現於和之中。

STEP 之外

把 $\cosh x$（或 $\cos x$）的冪寫成 $\cosh kx$ 的組合，是初嘗傅立葉分析（Fourier analysis）的滋味：e^{ikx} 是天然的基本構件，而 $\cos^n x$ 則是一個有限傅立葉級數（Fourier series），其係數都是二項式係數。把這個過程倒過來，將 $\cos nx$ 表示成 $\cos x$ 的多項式，便得到切比雪夫多項式（Chebyshev polynomials），它們在逼近理論（approximation theory）中十分重要。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）說明了為甚麼指數形式會令這些恆等式都顯得順理成章。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。