詳細解答

STEP II 1996，第 9 題

力學 • 穩定性與質心

> **STEP II 1996，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q9

關鍵思路

一切取決於玩具的質心（centre of mass）G 在其對稱軸（axis of symmetry）上的位置。以半球體（hemisphere）着地時，桌面與玩具的接觸點總是在半球體平面圓心 O 的正下方，所以 G 在 O 之下還是之上，就決定了玩具是「自行回正」還是「翻倒」。以圓錐（cone）着地時，玩具沿着一整條母線（generator）靠在桌面上，只要通過 G 的鉛垂線與這條接觸線相交，玩具便會留在原處。

解答

把玩具看成密度為 ρ 的均勻剛體（rigid body），並關於其軸對稱。設 O 為公共圓面的圓心，沿軸由 O 起量度距離，以指向圓錐頂點（vertex）V 的方向為正。

質心

圓錐的體積為 $\frac{1}{3}\pi a^2(\lambda a) = \frac{1}{3}\lambda\pi a^3$，其質心位於 $+\frac{1}{4}\lambda a$。半球體的體積為 $\frac{2}{3}\pi a^3$，其質心位於 $-\frac{3}{8}a$。所以 G 位於

$$h = \frac{\frac{1}{3}\lambda\cdot\frac{1}{4}\lambda a - \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}a}{\frac{1}{3}\lambda + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{12}\lambda^2 a - \frac{1}{4}a}{\frac{1}{3}(\lambda+2)} = \frac{a(\lambda^2-3)}{4(\lambda+2)}.$$

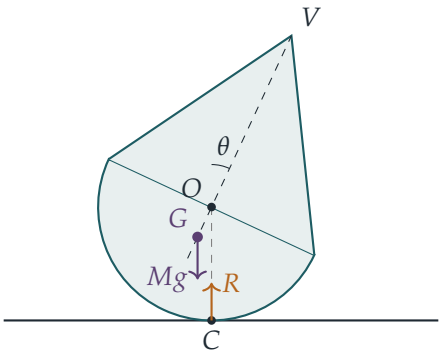
因此，G 在 O 之下，若 $\lambda < \sqrt{3}$；恰在 O，若 $\lambda = \sqrt{3}$；在 O 之上，若 $\lambda > \sqrt{3}$。

以半球體着地

設軸與向上的鉛垂線成角 θ，其中 $0 \le \theta < \frac{1}{2}\pi$，使半球體的曲面落在桌面上。

想一想 半球體究竟在哪一點接觸桌面？

桌面與半球體所屬的球面相切，而切平面（tangent plane）垂直於通過切點的半徑。所以接觸點 C 總是在 O 的正下方，而且 O 的高度總是 a，不論 θ 是多少。



（圖中所示為 G 在 O 之下的情況，即 $\lambda < \sqrt{3}$。）

對 C 取力矩（moment）。法向反作用力（normal reaction）和任何摩擦力（friction）都作用於 C，所以只有作用於 G 的重量 Mg 產生力矩。G 相對於 C（亦即相對於通過 O 的鉛垂線）的水平位移為 $h\sin\theta$，以頂點傾側的一方為正。

- 若 $\lambda < \sqrt{3}$，則 $h < 0$。對於 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ 內的每一個 θ，G 都位於通過 C 的鉛垂線的另一側，與頂點相反。所以重量會把玩具轉回 $\theta = 0$ 的方向。換一個說法，G 的高度為 $a + h\cos\theta = a - |h|\cos\theta$，在 $\theta = 0$ 時最小，所以直立位置就是勢能（potential energy）最小的位置。無論用哪一種看法，不管以半球體的哪一處着地，玩具都會回到直立位置（它會在該位置附近來回搖擺，直至摩擦力和空氣阻力令它停定）。
- 若 $\lambda > \sqrt{3}$，則 $h > 0$。對於任何傾角 $\theta > 0$，G 都位於頂點的同一側，重量會把玩具轉得更加偏離直立位置。此時 G 的高度 $a + h\cos\theta$ 在 $\theta = 0$ 時最大，所以直立是不穩定平衡（unstable equilibrium）。最輕微的傾側也會不斷擴大，直至邊緣碰到桌面，玩具倒在它的圓錐面上：它翻倒了。

（當 $\lambda = \sqrt{3}$ 時，$G = O$，玩具在任何傾角下都處於隨遇平衡（neutral equilibrium）。）這就是所要求的結果。

以圓錐着地

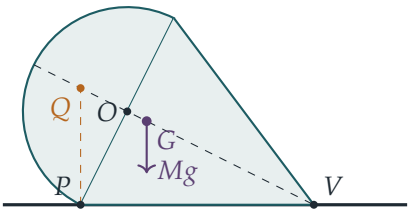
現在玩具以圓錐的一條母線 VP 貼着桌面躺下，其中 P 在邊緣上。我們在通過軸和 VP 的平面內考慮。在此平面內取坐標軸，以 O 為原點，$V = (0, \lambda a)$ 及 $P = (a, 0)$，於是半球體位於 $y < 0$ 的一側。圓錐沿 VP 的切平面垂直於這個平面，它在這個平面上的跡線

是直線

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{\lambda a}=1.$$

想一想 半球體會不會反而穿過桌面，以致圓錐無法以一條母線平貼桌面？

不會。玩具上每一點投影到這個平面上，都落在圓錐的三角形截面內，或落在半圓盤 $x^2+y^2\le a^2$，$y\le 0$ 內。在三角形上，$\frac{x}{a}+\frac{y}{\lambda a}\le 1$。在半圓盤上，$x\le a$ 且 $y\le 0$，所以 $\frac{x}{a}+\frac{y}{\lambda a}\le \frac{x}{a}\le 1$，等號僅在 P 成立。所以整個玩具都在該平面的同一側，只沿線段 VP 與平面接觸，別無其他接觸點。



（圖中所示為 $\lambda=2$ 的情況。虛線是 VP 在 P 處的垂線。）

所有反作用力都作用在 VP 上，並且垂直於桌面。所以玩具在桌面上處於平衡（equilibrium），而且不會繞 P 或 V 翻轉，當且僅當通過 G 的鉛垂線與線段 VP 相交，即由 G 到 VP 的垂足（foot of the perpendicular）位於 V 與 P 之間。

VP 在 V 處的垂線只在 V 與軸相交。設 VP 在 P 處的垂線與軸相交於 Q。在三角形 VPQ 中，P 處的角是直角，而 PO 是斜邊（hypotenuse）VQ 上的高，所以 $OP^2=OV\cdot OQ$，由此得

$$OQ=\frac{a^2}{\lambda a}=\frac{a}{\lambda}.$$

所以 Q 在 O 之下，距離為 a/λ。軸上的一點投影到線段 VP 上，當且僅當該點位於 Q 與 V 之間。所以我們需要

$$-\frac{a}{\lambda}<h<\lambda a.$$

右邊的不等式成立，因為 G 在玩具內部，位於 V 之下。至於左邊的不等式，兩邊乘以 $4\lambda(\lambda+2)/a>0$，

$$\frac{a(\lambda^2-3)}{4(\lambda+2)}>-\frac{a}{\lambda}\iff \lambda^3-3\lambda+4\lambda+8>0\iff \lambda^3+\lambda+8>0,$$

這對每一個 $\lambda>0$ 都成立。所以通過 G 的鉛垂線總與接觸線相交，玩具留在原處不動。由旋轉對稱性可知，哪一條母線與桌面接觸也沒有分別。所以不論 λ 取何值，玩具都會停留在它的圓錐面上，這正是所要證明的。

驗算

- 當 $\lambda = \sqrt{3}$ 時，公式給出 $h = 0$：圓錐的矩 $\frac{1}{12}\lambda^2 a$ 恰好與半球體的 $\frac{1}{4}a$ 平衡。把玩具切成薄圓片再以數值方法求和，對數個不同的 λ 所得的 h 都吻合，誤差在 $10^{-5}a$ 以內。
- 取 $\lambda = 1$：$h = -\frac{1}{6}a$ 且 $OQ = a$，而由 G 所作垂線的垂足位於由 V 到 P 全程的 0.583 處。取 $\lambda = 10$ 時，垂足位於全程的 0.790 處。在 $(0, 50)$ 內隨機抽取 20,000 個 λ 的值作測試，垂足每次都嚴格落在 VP 之內。
- 極限情況：當 $\lambda \to 0$ 時，玩具幾乎就是一個半球體（$h \to -\frac{3}{8}a$），而半球體會自行回正是眾所周知的。當 $\lambda \to \infty$ 時，玩具是一個長長的圓錐，G 隨着圓錐本身的質心沿軸上移。

常見錯誤

- 對直立玩具的最低點取力矩，而不是對實際的接觸點取力矩；接觸點會隨玩具滾動而移動，但總是在 O 的正下方。
- 在最後一部分，以為半球體也接觸桌面。其實並沒有，因為半圓盤位於 $y \leq 0$ 的一側。

STEP 之外

這個搖擺玩具讓我們初次接觸平衡的穩定性（stability）。一般而言，在平面上滾動的物體，當其質心低於其表面在接觸點處的曲率中心（centre of curvature）（在這裏即是 O）時，便是穩定的。同樣的想法也支配着浮船的穩心（metacentre）。在大學一年級的課程中，這會發展成對勢能極小值以及在其附近的小振動（small oscillations）的研究。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教材）正是以這種精神講述質心和剛體平衡。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。