詳細解答

STEP II 1996，第 8 題

純數學 • 二階微分方程

> **STEP II 1996，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q8

關鍵思路

這條方程把 $\mathrm{f}(x)$ 和 $\mathrm{f}(-x)$ 混在一起，所以它根本不是 f 的常微分方程（ordinary differential equation）。竅門是把方程寫兩次，一次在 x，一次在 $-x$，然後相加和相減。和 g 與差 h 各自滿足一條貨真價實的常係數方程（constant-coefficient equation），可以用餘函數（complementary function）和特別積分（particular integral）求解，而 f 則可由 $\frac{1}{2}(\mathrm{g}+\mathrm{h})$ 還原出來。

解答

$\mathrm{g}(0)$ 和 $\mathrm{g}'(0)$ 的值

在 $\mathrm{g}(x)=\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(-x)$ 中代入 $x=0$，得 $\mathrm{g}(0)=2\mathrm{f}(0)=2$。

求導時，鏈式法則（chain rule）令第二項多出一個負號：

$$\mathrm{g}'(x)=\mathrm{f}'(x)-\mathrm{f}'(-x),$$

所以 $\mathrm{g}'(0)=\mathrm{f}'(0)-\mathrm{f}'(0)=0$，正如所求。（留意我們並不需要 $\mathrm{f}'(0)$ 的值：g 是偶函數（even function），所以它的導數是奇函數（odd function），在 0 處必為零。）

g 所滿足的方程

再求導一次，鏈式法則帶來的兩個負號互相抵消：

$$\mathrm{g}''(x)=\mathrm{f}''(x)+\mathrm{f}''(-x).$$

想一想 $\mathrm{f}''(-x)$ 是甚麼？題目給出的方程只告訴我們 $\mathrm{f}''(x)$ 的情況。

題目給出的方程對所有 x 都成立，所以我們可以把式中的 x 全部換成 $-x$。由於 cos 是偶函數，這樣便得到

$$\mathrm{f}''(-x) + \mathrm{f}(x) = -x + 3\cos 2x.$$

把這條式與原方程相加，

$$\mathrm{f}''(x) + \mathrm{f}''(-x) + \mathrm{f}(-x) + \mathrm{f}(x) = 6\cos 2x, \qquad \text{即} \qquad \mathrm{g}''(x) + \mathrm{g}(x) = 6\cos 2x,$$

正如所求。

求解 g

輔助方程(auxiliary equation)$m^2 + 1 = 0$ 的根是 $\pm\mathrm{i}$，所以餘函數是 $A\cos x + B\sin x$。至於特別積分，我們試用 $\mathrm{g} = k\cos 2x$：這時 $\mathrm{g}'' + \mathrm{g} = -4k\cos 2x + k\cos 2x = -3k\cos 2x$，所以 $k = -2$。因此

$$\mathrm{g}(x) = A\cos x + B\sin x - 2\cos 2x.$$

現在由 $\mathrm{g}(0) = A - 2 = 2$ 得 $A = 4$，而 $\mathrm{g}'(0) = B = 0$。所以

$$\mathrm{g}(x) = 4\cos x - 2\cos 2x.$$

求解 h

對於 $\mathrm{h}(x) = \mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(-x)$，我們有

$$\mathrm{h}(0) = 0, \qquad \mathrm{h}'(x) = \mathrm{f}'(x) + \mathrm{f}'(-x), \quad \text{所以} \quad \mathrm{h}'(0) = 2\mathrm{f}'(0) = -2,$$

以及 $\mathrm{h}''(x) = \mathrm{f}''(x) - \mathrm{f}''(-x)$。這次我們從在 x 的方程減去在 $-x$ 的方程：

$$\mathrm{f}''(x) - \mathrm{f}''(-x) + \mathrm{f}(-x) - \mathrm{f}(x) = 2x, \qquad \text{即} \qquad \mathrm{h}''(x) - \mathrm{h}(x) = 2x.$$

想一想 為甚麼 h 前面的符號由 $+$ 變成了 $-$？

相減之後，f 的各項以 $\mathrm{f}(-x) - \mathrm{f}(x)$ 的形式出現，這是 $-\mathrm{h}(x)$，而不是 $+\mathrm{h}(x)$。所以這次的解是指數函數而不是三角函數：輔助方程 $m^2 - 1 = 0$ 給出餘函數 $C\mathrm{e}^x + D\mathrm{e}^{-x}$。試用 $\mathrm{h} = px + q$ 作為特別積分，得 $-(px + q) = 2x$，所以 $p = -2$，$q = 0$。因此

$$\mathrm{h}(x) = C\mathrm{e}^x + D\mathrm{e}^{-x} - 2x.$$

由初始條件得 $\mathrm{h}(0) = C + D = 0$ 和 $\mathrm{h}'(0) = C - D - 2 = -2$，所以 $C = D = 0$，而

$$\mathrm{h}(x) = -2x.$$

還原 f

把 g 和 h 的定義相加，得 $\mathrm{g}+\mathrm{h}=2\mathrm{f}$，所以

$$\mathrm{f}(x)=\tfrac{1}{2}(\mathrm{g}(x)+\mathrm{h}(x))=\tfrac{1}{2}(4\cos x-2\cos 2x-2x)=2\cos x-\cos 2x-x,$$

這就是所求的結果。

驗算

- $\mathrm{f}(0)=2-1-0=1$，而 $\mathrm{f}'(x)=-2\sin x+2\sin 2x-1$，所以 $\mathrm{f}'(0)=-1$。
- 代回原方程：$\mathrm{f}''(x)=-2\cos x+4\cos 2x$ 和 $\mathrm{f}(-x)=2\cos x-\cos 2x+x$，兩者相加得 $x+3\cos 2x$。
- 奇偶性（parity）正確：g 是偶函數，h 是奇函數，理應如此。
- 把 $\mathrm{f}(x)$、$\mathrm{f}(-x)$ 這一對函數由 $x=0$ 逐步數值計算至 $x=3$，得 $\mathrm{f}(3)\approx -5.940155$，與 $2\cos 3-\cos 6-3$ 吻合。

常見錯誤

- 忘記鏈式法則帶來的符號：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{f}(-x)=-\mathrm{f}'(-x)$，但 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{f}(-x)=+\mathrm{f}''(-x)$。
- 只在方程的其中一邊把 x 換成 $-x$：右邊的 x 同樣要變成 $-x$。
- 得出 $\mathrm{h}''+\mathrm{h}=2x$，結果 h 中出現了三角函數項。

STEP 之外

這是一條泛函微分方程（functional differential equation），當中未知函數在多於一點取值。拆成偶部和奇部之所以行得通，是因為反射 $x\mapsto -x$ 是一個線性映射（linear map），而且它的平方是恆等映射（identity），所以它的特徵值（eigenvalue）是 ± 1，每個函數都可以唯一地分解為偶部（特徵值 1）和奇部（特徵值 -1）。在每一部分上，方程都變成一條常微分方程。這種按對稱性分解的想法貫穿整個線性代數（linear algebra）和傅立葉分析（Fourier analysis）。關於常係數方程本身，可參閱 Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程入門教材）；關於線性代數的觀點，可參閱 Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門教材）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。