詳細解答

STEP II 1996，第 7 題

純數學 • 坐標幾何中的軌跡

> **STEP II 1996，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q7

關鍵思路

為正方形設定坐標，使它對兩條坐標軸都對稱。這樣每個距離都是一個線性式的絕對值（modulus），而兩個乘積 pr 和 qs 就變成 $|y^2 - a^2|$ 和 $|x^2 - a^2|$。形如 $|U| = |V|$ 的方程可分拆為 $U = V$ 或 $U = -V$。其中一種情況給出兩條直線，另一種情況給出圓。

解答

設正方形的邊長為 $2a$（其中 $a > 0$），中心位於原點，各邊與坐標軸平行：

$$A = (-a, -a), \quad B = (a, -a), \quad C = (a, a), \quad D = (-a, a).$$

於是 AB 位於直線 $y = -a$ 上，BC 位於 $x = a$ 上，CD 位於 $y = a$ 上，DA 位於 $x = -a$ 上。由 $P = (x, y)$ 到水平線 $y = c$ 的垂直距離（perpendicular distance）是 $|y - c|$，到鉛垂線 $x = c$ 的垂直距離則是 $|x - c|$。所以

$$p = |y + a|, \qquad q = |x - a|, \qquad r = |y - a|, \qquad s = |x + a|.$$

這些公式對平面上每一點 P 都成立，不論它在正方形之內還是之外。正是絕對值確保了距離非負，所以我們絕不能把它們略去。

兩兩相乘，並利用 $|u|\,|v| = |uv|$，得

$$pr = |(y + a)(y - a)| = |y^2 - a^2|, \qquad qs = |(x - a)(x + a)| = |x^2 - a^2|.$$

> **想一想** 怎樣才能去掉 $|y^2 - a^2| = |x^2 - a^2|$ 中的絕對值，而又不必分成許多區域來討論？

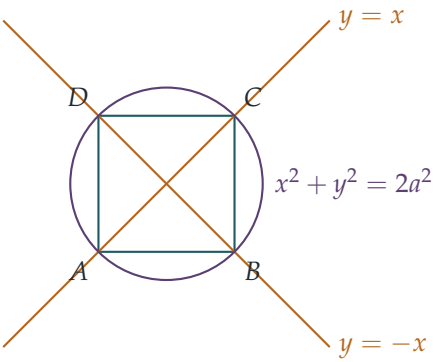
對實數而言，$|U| = |V|$ 成立當且僅當（if and only if）$U = V$ 或 $U = -V$，因為兩邊都非負，而且 $|U| = |V| \iff U^2 = V^2 \iff (U - V)(U + V) = 0$。由於我們每一步用的都是「當且僅當」的推論，所以必要條件（necessary condition）和充分條件（sufficient condition）會同時得到。因此 $pr = qs$ 成立當且僅當

$$y^2 - a^2 = x^2 - a^2 \qquad 或 \qquad y^2 - a^2 = -(x^2 - a^2).$$

第一種情況。$y^2 = x^2$，即 $(y - x)(y + x) = 0$，所以 $y = x$ 或 $y = -x$。這就是通過正方形中心、分別包含對角線 AC 和 BD 的兩條（無限延伸的）直線。

第二種情況。$x^2 + y^2 = 2a^2$。這是以正方形的中心為圓心、半徑為 $\sqrt{2}\,a$ 的圓，而這個半徑正是對角線的一半。所以它是正方形的外接圓（circumcircle），通過 A、B、C 和 D。

因此，$pr = qs$ 迫使 P 必須位於兩條對角線所在的直線 AC、BD（無限延長）其中之一上，或位於 $ABCD$ 的外接圓上。反過來說，以上每一步都是可逆的。若 P 在其中一條直線上，則 $x^2 = y^2$，所以 $|y^2 - a^2| = |x^2 - a^2|$。若 P 在圓上，則 $y^2 - a^2 = a^2 - x^2$，同樣得到 $|y^2 - a^2| = |x^2 - a^2|$。無論哪種情況都有 $pr = qs$，所以兩條直線和圓上的每一點都是 P 的可能位置。證明至此完成。



想一想 正方形以外的點真的可以嗎？那兩條直線會在頂點處終止嗎？

題目容許平面上的任何一點，而我們的距離公式在整個平面上都成立。所以軌跡（locus）是每條直線的全部，而不僅是作為線段的對角線。例如，$P = (3a, 3a)$ 有 $p = 4a$、$r = 2a$、$q = 2a$、$s = 4a$，所以 $pr = qs = 8a^2$。

驗算

- 中心 $(0,0)$ 同時在兩條直線上：$p = q = r = s = a$，所以 $pr = qs$。
- 取圓上位於 AB 中點正下方的一點，即 $(0, -\sqrt{2}\,a)$。這時 $p = (\sqrt{2} - 1)a$，$r = (\sqrt{2} + 1)a$，所以 $pr = a^2$；又 $q = s = a$，所以 $qs = a^2$。

- 不在軌跡上的點，例如 $(\frac{1}{2}a, 0)$，給出 $pr = a^2$ 但 $qs = \frac{3}{4}a^2$，所以它不符合條件。
- 數值上（取 $a = 1.7$），在三條曲線上隨機抽取的 30 000 個點處，$pr = qs$ 都成立，誤差在 10^{-9} 以內。在 $[-5, 5]^2$ 上以 600×600 的網格掃描 $pr - qs$ 的正負號變化，除了兩條直線和圓之外，沒有發現其他零點。

常見錯誤

- 略去絕對值，寫成 $pr = a^2 - y^2$、$qs = a^2 - x^2$。這只在正方形內部才成立，而且會遺漏了圓，只得出 $y = \pm x$。
- 只證明 P 必須位於這些曲線上。題目還要求證明逆命題（converse），所以要說明為何直線和圓上的每一點都符合條件。
- 把那兩條直線說成是對角線段 AC 和 BD。它們是完整的直線。

STEP 之外

這個軌跡是多項式 $(y^2 - a^2)^2 - (x^2 - a^2)^2$ 的零點集（zero set），而這個多項式可因式分解為 $(y - x)(y + x)(x^2 + y^2 - 2a^2)$。由多項式方程給出、並且像這樣分拆成較簡單部分的曲線，正是可約（reducible）代數曲線（algebraic curve）的第一個例子。按照圖形的對稱性來選取坐標，正是讓這類因式分解顯現出來的好習慣。想看更多這種風格的幾何題，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*；至於曲線的代數理論，可參閱 Reid 的 *Undergraduate Algebraic Geometry*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。