詳細解答

STEP II 1996，第 6 題

純數學 • 因數的計數

STEP II 1996，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/96-s2-q6

關鍵思路

N 的每一個因數（factor），都是這樣構成的：對每個質數（prime）p_i 獨立地選擇取多少個，可取 0 至 m_i 個。數清這些選擇的數目，就數清了所有因數，然後再剔除 1 和 N。此後，兩道搜尋題都變成關於指數（exponent）的問題：哪些指數組合能給出所需的個數，以及怎樣把這些指數分配到各質數上，使 N 盡可能小。

解答

開首的例子

12 的因數是 $1, 2, 3, 4, 6, 12$。剔除 1 和 12 後餘下 $2, 3, 4, 6$，即有 4 個真因數（proper factor）。16 的因數是 $1, 2, 4, 8, 16$。剔除 1 和 16 後餘下 $2, 4, 8$，即有 3 個真因數。

一般情況的計數

設 M 整除 N。那麼 M 的每個質因數都是 N 的質因數，而且它在 M 中出現的次數不能多於在 N 中出現的次數。所以

$$M = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}, \qquad 0 \le a_i \le m_i.$$

反過來，每個這樣的乘積都整除 N。根據質因數分解的唯一性（uniqueness of prime factorisation），不同的 $(a_1, \ldots, a_r)$ 給出不同的整數 M。因此 N 的因數與這些選擇一一對應。每個 a_i 有 $m_i + 1$ 種選擇，而且各自獨立，所以 N 一共有

$$d(N) = (m_1 + 1)(m_2 + 1) \cdots (m_r + 1)$$

個因數。由於 $r \geq 1$，我們有 $N > 1$，所以 1 和 N 是兩個不同的因數。剔除它們之後，真因數的個數是

$$(m_1+1)(m_2+1)\cdots(m_r+1)-2.$$

驗證：$12 = 2^2 \cdot 3$ 給出 $3 \cdot 2 - 2 = 4$，而 $16 = 2^4$ 給出 $5 - 2 = 3$。

使 N 盡量小的原則

在兩部分中，我們都先固定指數，再問這些指數所容許的最小 N 是多少。以下兩點觀察便可解決這個問題。

- 使用最小的質數。假如用了某個質數 q，卻沒有用一個較小的質數 p，那麼把 q 換成 p 後，每個指數都保持不變，因數個數也就不變，而 N 卻變小了。所以所用的質數應該是 $2, 3, 5, \ldots$，中間不留空缺。
- 把最大的指數放在最小的質數上。設 $p < q$，其中 p 的指數是 a，q 的指數是 b，而 $a < b$。把兩個指數對調，相當於把 N 乘以 $p^{b-a}/q^{b-a} < 1$，而因數個數不變。

因此，對於指數 $e_1 \geq e_2 \geq \cdots \geq e_r$，最小的 N 是 $2^{e_1}3^{e_2}5^{e_3}\cdots$。

第 (i) 部分

我們需要剛好 12 個真因數，所以 $d(N) = 14$。每個因子 $m_i + 1$ 至少是 2，而 $14 = 2 \cdot 7$，其中 7 是質數。所以把 14 寫成若干個至少為 2 的因子之積，只有兩種方法：

- 14 本身：$N = p^{13}$，最小為 $2^{13} = 8192$；
- 7×2：$N = p^6 q$，最小為 $2^6 \cdot 3 = 192$。

所以剛好有 12 個真因數的最小正整數是

$$\boxed{192 = 2^6 \cdot 3}.$$

它的因數是 $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64, 96, 192$，共有 14 個。

第 (ii) 部分

現在我們需要 $d(N) \geq 14$。由於 $d(N)$ 不再是固定的，我們按相異質數的個數 r 來分類。把指數由大至小排列，$e_1 \geq e_2 \geq \cdots$。

> ? **想一想** 為甚麼不能直接沿用第 (i) 部分，只考慮 $d(N) = 14$ 的情況？

因為因數較多，並不代表 N 一定較大。把指數分散到幾個小質數上，只需很小的代價就能得到很多因數。例如，$2^3 \cdot 3 \cdot 5$ 有 $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ 個因數，卻比 192 小得多。所以我們必須考慮每一個 $d(N) \geq 14$ 的值。

- $r \geq 4$：這時 $N \geq 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$。
- $r = 3$：這時 $d(N) = (e_1+1)(e_2+1)(e_3+1) \geq 14$。若 $e_2 = e_3 = 1$，則需要 $4(e_1+1) \geq 14$，所以 $e_1 \geq 3$，而 $N \geq 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$。否則 $e_2 \geq 2$，於是 $e_1 \geq 2$，而 $N \geq 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$。
- $r = 2$：這時 $(e_1+1)(e_2+1) \geq 14$，其中 $e_1 \geq e_2$。若 $e_2 = 1$，則 $e_1 \geq 6$，而 $N \geq 2^6 \cdot 3 = 192$。若 $e_2 = 2$，則由 $3(e_1+1) \geq 14$ 得 $e_1 \geq 4$，所以 $N \geq 2^4 \cdot 3^2 = 144$。若 $e_2 \geq 3$，則 $e_1 \geq 3$，而 $N \geq 2^3 \cdot 3^3 = 216$。
- $r = 1$：$e_1 + 1 \geq 14$，所以 $N \geq 2^{13} = 8192$。

每種情況都給出 $N \geq 120$，而 $N = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ 確實符合要求：它有 $4 \cdot 2 \cdot 2 - 2 = 14$ 個真因數。所以最少有 12 個真因數的最小正整數是

$$\boxed{120},$$

而它其實有 14 個真因數。

驗算

以窮舉法逐一數出由 2 至 9000 每個 N 的真因數個數，結果與公式 $d(N) - 2$ 吻合。窮舉亦證實 192 是第一個剛好有 12 個真因數的 N，而 120 是第一個最少有 12 個真因數的數（它有 14 個）。若想用手快速核對，可留意略小於 120 而因數眾多的數，即 $60, 72, 84, 90, 96$ 和 108，全都有 12 個因數，因此只有 10 個真因數。

常見錯誤

- 設 $d(N) = 12$ 而不是 14。要記得 1 和 N 並不計算在內。
- 第 (ii) 部分也答 192。最少有 12 個真因數的最小 N，不一定剛好有 12 個。
- 把大指數放在大質數上：$2 \cdot 3^6$ 的因數個數與 $2^6 \cdot 3$ 相同，但數值大得多。

STEP 之外

因數函數（divisor function）$d(N)$ 具有積性（multiplicative）：只要 a 與 b 互質（coprime），就有 $d(ab) = d(a)d(b)$。這正是上述乘積公式所表達的。因數個數比所有較小的數都多的數，稱為高度合成數（highly composite number），拉馬努金（Ramanujan）曾對它們作過深入研究。120 就是其中之一，而本題所用的指數排序論證，正是他的分析的起點。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 是一本介紹因數函數和唯一分解的精彩入門書。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。