詳細解答

STEP II 1996，第 5 題

純數學 • 單位根

> **STEP II 1996，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q5

關鍵思路

這個四次方程是迴文（palindromic）的：它的係數由前往後讀和由後往前讀都一樣。除以 z^2 之後，各項可歸併為 z^2+z^{-2} 和 $z+z^{-1}$ 兩組，而兩者都可以用 $u=z+z^{-1}$ 表示，於是 z 的四次方程（quartic）便化為 u 的二次方程（quadratic）。題目的後半部分，是要認出這個四次式正是從 z^5-1 抽出因式 $z-1$ 後餘下的因式，所以它的根是五次單位根（fifth roots of unity）；把同樣四個數的兩種描述互相比較，便得到三角函數的精確值。

解答

u 的值

由於 $z=0$ 不滿足 $(*)$，我們可以除以 z^2：

$$z^2+z+1+z^{-1}+z^{-2}=0.$$

現在 $u^2=(z+z^{-1})^2=z^2+2+z^{-2}$，所以 $z^2+z^{-2}=u^2-2$。方程變成

$$u^2-2+u+1=0, \qquad \text{即} \qquad u^2+u-1=0,$$

所以

$$u=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{或} \quad u=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

z 的值

由 $z+z^{-1}=u$ 得 $z^2-uz+1=0$，所以

$$z=\frac{u\pm\sqrt{u^2-4}}{2}.$$

利用 $u^2 = 1 - u$，判別式（discriminant）為 $u^2 - 4 = -3 - u$，它對 u 的兩個值都是負數（因為兩種情況下都有 $|u| < 2$），所以根都不是實數：

$$z = \frac{u \pm i\sqrt{3+u}}{2}.$$

當 $u = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 時，$3 + u = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$；當 $u = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ 時，$3 + u = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$。寫成 $\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}$，則 $(*)$ 的四個解為

$$z = \frac{-1+\sqrt{5} \pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \qquad \text{和} \qquad z = \frac{-1-\sqrt{5} \pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

u 的每個值給出 z 的兩個值（一對 z, z^{-1}，在這裏它們互為共軛複數（complex conjugates）），而四次方程恰好有四個根，所以這些就是全部的根。

與 $z^5 = 1$ 的關係

展開得

$$(z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = z^5 - 1,$$

因為中間各項逐一對消。所以若 z 滿足 $(*)$，則第二個因式為零，從而 $z^5 - 1 = 0$。

$z^5 = 1$ 的解是 $z = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}$，其中 $k = 0, 1, 2, 3, 4$。$k = 0$ 給出 $z = 1$，它並不滿足 $(*)$（左邊等於 5）。其餘四個解互不相同，而且全部滿足 $(*)$，因為對它們而言 $z - 1 \neq 0$，所以因式 $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ 必須為零。因此 $(*)$ 的解是

$$z = \cos\theta + i\sin\theta, \qquad r = 1, \quad \theta = \pm\frac{2\pi}{5}, \pm\frac{4\pi}{5}.$$

推導結果

現在我們有同樣四個數的兩種描述，必須把它們逐一配對。

> ? **想一想** 四個根式（surd）表達式之中，哪一個是 $\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$？

看正負號。由於 $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$，$\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$ 這個數的實部和虛部都是正數。在各個根式表達式之中，實部分別是 $\frac{-1+\sqrt{5}}{4} > 0$ 和 $\frac{-1-\sqrt{5}}{4} < 0$，所以恰好只有一個位於第一象限：

$$\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

（在 $(0, \pi)$ 內的另一個角，即 $\frac{4\pi}{5}$，其餘弦為負數，所以它與另一個虛部為正的根配對。）比較實部和虛部，

$$\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \qquad \text{和} \qquad \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4},$$

這正是所要求的結果。順帶可得 $\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ 和 $\sin\frac{4\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$。

驗算

- $\cos\frac{2\pi}{5} = \cos 72^\circ \approx 0.30902$，而 $\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \approx 0.30902$；$\sin 72^\circ \approx 0.95106$，而 $\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \approx 0.95106$。
- 四個根之和應為 -1（即 z^3 的係數的相反數）：各實部相加得 $\frac{2(-1+\sqrt{5})+2(-1-\sqrt{5})}{4} = -1$。換句話說，$u$ 的兩個值之和為 -1。
- 每個根的模（modulus）應為 1：例如 $\frac{(-1+\sqrt{5})^2+(10+2\sqrt{5})}{16} = \frac{16}{16} = 1$。

我們已用數值方法驗證：四個根式表達式全部滿足 $(*)$ 和 $z^5 = 1$，並且與 $e^{\pm 2\pi i/5}$, $e^{\pm 4\pi i/5}$ 相符。

常見錯誤

- 忘記排除 $z = 1$：它滿足 $z^5 = 1$ 但不滿足 $(*)$，所以 $(*)$ 有四個根，而不是五個。
- 毫無理據地把根式與角配對。正是實部的正負號，確定了哪一個根是 $\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$。
- 寫成 $z^2 + z^{-2} = u^2$ 而漏掉了 -2。

STEP 之外

代換 $u = z + z^{-1}$ 可以把任何迴文多項式的次數減半。只需解二次方程便能求得 $\cos\frac{2\pi}{5}$，這絕非偶然：高斯（Gauss）證明了，$\cos\frac{2\pi}{n}$ 能夠單用平方根寫出，當且僅當正 n 邊形可以用尺規作圖（ruler and compass construction）作出，而本題正是正五邊形作圖背後的代數。完整的來龍去脈屬於伽羅瓦理論（Galois theory），會在大學二年級的代數課程中學到；Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）從幾何角度展示了單位根優美的一面。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。