詳細解答

STEP II 1996，第 4 題

純數學 • 代換積分法

> **STEP II 1996，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q4

關鍵思路

看到平方根 $\sqrt{1+x}$ 和 $\sqrt{1-x}$，最自然的做法就是代入 $x=\cos t$，因為半角公式（half-angle formulae）可把 $1\pm\cos t$ 化為完全平方。根號消去之後，和式 $\cos\theta+\sin\theta$ 可合併成單一個餘弦，整個分母於是變成 $1+\cos(\text{某個角})$，這又是一個完全平方。最後一次代換（substitution）把積分區間重新置中，使分子變成 $\cos 4u$，這正是題目要先證明該恆等式（identity）的原因。

解答

恆等式

兩次運用 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$，並設 $c=\cos u$：

$$\begin{aligned}\cos 4u &= 2\cos^2 2u - 1 = 2\left(2c^2-1\right)^2 - 1\\ &= 2\left(4c^4-4c^2+1\right) - 1 = 8\cos^4 u - 8\cos^2 u + 1,\end{aligned}$$

得證。

第一次代換

設 $x=\cos t$，則 $\mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t$。當 x 由 -1 變到 1 時，t 由 π 遞減至 0；負號正好把上下限對調回來，得

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{1+\cos t}+\sqrt{1-\cos t}+2}\,\mathrm{d}t.$$

現在 $1+\cos t = 2\cos^2\frac{t}{2}$，而 $1-\cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}$。

想一想 $\sqrt{2\cos^2\frac{t}{2}}$ 真的等於 $\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}$，而不是 $\sqrt{2}\left|\cos\frac{t}{2}\right|$ 嗎？

一般而言應取絕對值（modulus），但這裏 $0 \le t \le \pi$，所以 $0 \le \frac{t}{2} \le \frac{\pi}{2}$，$\cos\frac{t}{2}$ 和 $\sin\frac{t}{2}$ 皆為非負。這正是選取 $t \in [0, \pi]$（而不是例如 $[-\pi, 0]$）的關鍵所在。因此

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\cos t}+\sqrt{1-\cos t} &= \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{t}{2}+\sin\tfrac{t}{2}\right)\\ &= 2\left(\cos\tfrac{t}{2}\cos\tfrac{\pi}{4}+\sin\tfrac{t}{2}\sin\tfrac{\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\tfrac{t}{2}-\tfrac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

設 $v = \frac{t}{4} - \frac{\pi}{8}$，使得 $\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4} = 2v$，則分母為

$$2 + 2\cos 2v = 2(1+\cos 2v) = 4\cos^2 v = 4\cos^2\left(\tfrac{t}{4}-\tfrac{\pi}{8}\right),$$

所以

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{4\cos^2\left(\frac{t}{4}-\frac{\pi}{8}\right)}\,\mathrm{d}t,$$

得證。

第二次代換

設 $u = \frac{t}{4} - \frac{\pi}{8}$，則 $t = 4u + \frac{\pi}{2}$，$\mathrm{d}t = 4\,\mathrm{d}u$。上下限 $t = 0$ 和 $t = \pi$ 分別變成 $u = -\frac{\pi}{8}$ 和 $u = \frac{\pi}{8}$。分子為

$$\sin t = \sin\left(4u + \tfrac{\pi}{2}\right) = \cos 4u,$$

開首的恆等式正好在這裏派上用場。於是

$$\begin{aligned}I &= \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \frac{\cos 4u}{4\cos^2 u}\cdot 4\,\mathrm{d}u = \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \frac{8\cos^4 u - 8\cos^2 u + 1}{\cos^2 u}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \left(8\cos^2 u - 8 + \sec^2 u\right)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

除以 $\cos^2 u$ 並無問題，因為在這個區間上 $\cos u \ge \cos\frac{\pi}{8} > 0$。利用 $8\cos^2 u = 4 + 4\cos 2u$，被積函數（integrand）為 $4\cos 2u - 4 + \sec^2 u$，所以

$$I = \Big[\,2\sin 2u - 4u + \tan u\,\Big]_{-\pi/8}^{\pi/8}.$$

方括號內是 u 的奇函數（odd function），所以其值等於它在 $\frac{\pi}{8}$ 處取值的兩倍：

$$\begin{aligned}I &= 2\left(2\sin\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\pi}{2} + \tan\tfrac{\pi}{8}\right) = 2\left(\sqrt{2} - \tfrac{\pi}{2} + \sqrt{2} - 1\right)\\ &= 4\sqrt{2} - \pi - 2,\end{aligned}$$

其中用到 $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 以及題目給出的 $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$。這就是所求的結果。

驗算

- 數值上，$4\sqrt{2}-\pi-2\approx 0.51526$。把辛普森法則（Simpson's rule）分別應用於原來關於 x 的積分、關於 t 的積分和關於 u 的積分，結果都是 0.515262。
- 大小檢查：在 $[-1,1]$ 上，和式 $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ 介乎 $\sqrt{2}$（在 $x=\pm 1$ 處）與 2（在 $x=0$ 處）之間，所以被積函數介乎 $\frac{1}{4}$ 與 $\frac{1}{2+\sqrt{2}}\approx 0.293$ 之間。因此 $0.5\leq I\leq 0.586$，而 0.515 與此相符。
- 在 $t=0$ 處，分母 $4\cos^2(-\frac{\pi}{8})$ 應等於 $\sqrt{2}+0+2$；果然 $4\cos^2\frac{\pi}{8}=2(1+\cos\frac{\pi}{4})=2+\sqrt{2}$。

常見錯誤

- 漏掉 $\mathrm{d}x=-\sin t\,\mathrm{d}t$ 中的負號，或忘記對調上下限，結果得出 $-I$。
- 寫下 $\sqrt{1+\cos t}=\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}$，卻沒有指出在 $[0,\pi]$ 上 $\cos\frac{t}{2}\geq 0$。
- 漏掉 $\mathrm{d}t=4\,\mathrm{d}u$ 中的因子 4；它剛好與分母的 4 互相抵消。

STEP 之外

像 $x=\cos t$ 這類把平方根「有理化」的代換，其實是一個普遍事實的特例：若被積函數是 x 與 $\sqrt{1-x^2}$（或類似的二次根式）的有理函數（rational function），就總可以透過三角代換或 $t=\tan\frac{\theta}{2}$ 代換把它化為有理函數，然後以初等函數（elementary functions）表示其積分。到了大學，你會學到這套方法的系統版本，也會見到它的局限：遇上三次或四次根式時，便會得出橢圓積分（elliptic integrals），而這些積分並非初等。想做更多這種風格的題目，可參考 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。