詳細解答

STEP II 1996，第 3 題

純數學 • 以數學歸納法證明斐波那契恆等式

> **STEP II 1996，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q3

關鍵思路

這裏的一切都源自遞推關係（recurrence），所以歸納法（induction）是最自然的工具。對於乘積 $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$，竅門是比較相鄰的兩個值：用一次遞推關係，每個值就變成前一個值的相反數。至於加法公式（addition formula），巧妙的做法是對 k 作歸納，同時讓歸納假設（induction hypothesis）對每一個 n 一併成立，這樣我們就可以用 $n+1$ 代替 n 來應用它。

解答

最初幾項的值

在 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ 中取 $n = 1, 2, 3$：

$$F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1, \qquad F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2, \qquad F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3,$$

正如題目所求。繼續算下去，

$$F_5 = 3 + 2 = 5, \qquad F_6 = 5 + 3 = 8, \qquad F_7 = 8 + 5 = 13.$$

乘積 $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$

對 $n \geq 1$，記 $C_n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$。由數值表可得：

n	1	2	3	4	5	6
$F_{n+1}F_{n-1}$	$1 \cdot 0$	$2 \cdot 1$	$3 \cdot 1$	$5 \cdot 2$	$8 \cdot 3$	$13 \cdot 5$
F_n^2	1	1	4	9	25	64
C_n	-1	1	-1	1	-1	1

這些值正負交替，所以我們猜想

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \qquad \text{對所有} n \geq 1.$$

想一想 只用遞推關係，怎樣才能由 C_n 得到 C_{n+1}？

把 C_{n+1} 中下標較大的一項展開。對 $n \geq 1$，

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 \\ &= (F_{n+1} + F_n)F_n - F_{n+1}^2 && \text{(遞推關係用於} F_{n+2}\text{)} \\ &= F_n^2 - F_{n+1}(F_{n+1} - F_n) \\ &= F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} && \text{(因為} F_{n+1} - F_n = F_{n-1}\text{，其中} n \geq 1\text{)} \\ &= -C_n. \end{aligned}$$

這樣一來，歸納法便水到渠成。基礎步驟（base case）是 $C_1 = F_2F_0 - F_1^2 = 0 - 1 = -1 = (-1)^1$。若對某個 $n \geq 1$ 有 $C_n = (-1)^n$，則 $C_{n+1} = -C_n = (-1)^{n+1}$。因此由歸納法可得

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \qquad \text{對每一個} n \geq 1.$$

加法公式

對每個正整數 k，設 $P(k)$ 為以下命題：

$$F_{n+k} = F_kF_{n+1} + F_{k-1}F_n \qquad \text{對所有正整數} n.$$

基礎步驟 $k = 1$。右邊是 $F_1F_{n+1} + F_0F_n = 1 \cdot F_{n+1} + 0 = F_{n+1}$，正是左邊。所以 $P(1)$ 成立。

歸納步驟（*inductive step*）。假設 $P(k)$ 對某個 $k \geq 1$ 成立，並設 n 為任意正整數。

想一想 歸納假設說的是 F_{n+k}，但我們需要的是 F_{n+k+1}。應該把哪一個 n 代進去？

由於 $P(k)$ 對每一個正整數都成立，而 $(n+1)+k = n+(k+1)$，我們可以用 $n+1$ 代替 n 來應用它：

$$\begin{aligned} F_{n+(k+1)} = F_{(n+1)+k} &= F_kF_{n+2} + F_{k-1}F_{n+1} && \text{(由} P(k)\text{，取} n+1\text{)} \\ &= F_k(F_{n+1} + F_n) + F_{k-1}F_{n+1} && \text{(遞推關係用於} F_{n+2}\text{)} \\ &= (F_k + F_{k-1})F_{n+1} + F_kF_n \\ &= F_{k+1}F_{n+1} + F_kF_n && \text{(遞推關係，因} k \geq 1\text{)}. \end{aligned}$$

對這個 n 而言，這正是 $P(k+1)$，而 n 是任意的。所以由歸納法，$P(k)$ 對每一個正整數 k 都成立，即

$$F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n \qquad \text{對所有正整數} n, k,$$

正如題目所求。

（另一個做法是固定 n，對 k 作兩步歸納：先驗證 $k=1$ 和 $k=2$，再把 $k-1$ 和 k 的公式相加。兩條路都可行；上面的做法只需要一個基礎步驟。）

驗算

- 卡西尼（Cassini）恆等式，取 $n=6$：$F_7F_5 - F_6^2 = 13\cdot 5 - 64 = 1 = (-1)^6$。
- 加法公式，取 $n=3$、$k=4$：$F_7 = 13$，而 $F_4F_4 + F_3F_3 = 9+4 = 13$。
- 取 $k=n$ 可得 $F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$；當 $n=3$ 時，這就是 $F_6 = 2\cdot(3+1) = 8$。

電腦已驗證乘積公式對 $1 \le n < 150$ 成立，以及加法公式對所有 $1 \le n, k < 90$ 成立。

常見錯誤

- 把正負號弄反：$C_1 = -1$，所以答案是 $(-1)^n$，而不是 $(-1)^{n+1}$。
- 在加法公式中，固定 n 對 k 作歸納，卻又在 $n+1$ 處使用歸納假設：只有當歸納假設是對所有 n 陳述時，這樣做才合理。
- 使用 $F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$ 時，沒有指出它需要 $n \ge 1$。

STEP 之外

這兩個恆等式都是同一個矩陣（matrix）事實的投影：$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$。取行列式（determinant）便立即得到乘積公式（卡西尼恆等式，Cassini's identity），而寫出 $M^{n+k} = M^k M^n$ 則得到加法公式。卡西尼恆等式還說明相鄰的兩個斐波那契數（Fibonacci numbers）互質（coprime），再配合加法公式，更可以證明一個令人驚歎的結果：$\gcd(F_m, F_n) = F_{\gcd(m,n)}$。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 是探索這類數論的好去處，而 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra* 則透過特徵值（eigenvalues）來處理斐波那契數。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。