詳細解答

STEP II 1996，第 2 題

純數學 • 非線性聯立方程

> **STEP II 1996，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q2

關鍵思路

這組方程對 x、y、z 而言並非線性，但每一項都只是三個乘積 yz、zx、xy 其中之一。把這三個乘積當作未知數，方程組便化為三條線性（linear）方程，可以用消元法（elimination）求解。把三個乘積相乘便得 $(xyz)^2$，再把 xyz 逐一除以各個乘積，就能還原出每個變數。

解答

偽裝起來的線性方程組

設

$$a = yz, \qquad b = zx, \qquad c = xy.$$

於是三條方程變成

$$2a + b - 5c = 2, \tag{1}$$

$$a - b + 2c = 1, \tag{2}$$

$$a - 2b + 6c = 3. \tag{3}$$

由 (2) 得 $a = 1 + b - 2c$。代入 (1)：

$$2(1 + b - 2c) + b - 5c = 2 \quad \Longrightarrow \quad 3b - 9c = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = 3c.$$

代入 (3)：

$$(1 + b - 2c) - 2b + 6c = 3 \quad \Longrightarrow \quad -b + 4c = 2.$$

連同 $b = 3c$ 可得 $c = 2$，所以 $b = 6$，$a = 1 + 6 - 4 = 3$。係數矩陣（coefficient matrix）的行列式（determinant）為 $-3 \neq 0$，因此這是該線性方程組的唯一解：

$$yz = 3, \qquad zx = 6, \qquad xy = 2.$$

證明 $xyz = \pm 6$

把三個乘積相乘，

$$(yz)(zx)(xy) = x^2y^2z^2 = (xyz)^2 = 3 \times 6 \times 2 = 36,$$

所以 $xyz = 6$ 或 $xyz = -6$，正如題目所求。

? **想一想** 現在我們已知 xyz，以及 yz、zx、xy 各自的值。怎樣才能單獨求出 x？

三個乘積全都不是零，所以 x、y、z 全都不是零，我們可以放心相除：

$$x = \frac{xyz}{yz}, \qquad y = \frac{xyz}{zx}, \qquad z = \frac{xyz}{xy}.$$

可能的取值

若 $xyz = 6$，則 $x = 6/3 = 2$，$y = 6/6 = 1$，$z = 6/2 = 3$。

若 $xyz = -6$，則 $x = -2$，$y = -1$，$z = -3$。

以上每一步都是必然的結果，所以只有這兩組候選解；兩者都滿足原來的方程（方程只涉及兩個變數的乘積，所以把三個變數同時變號，方程保持不變）。因此

$$(x, y, z) = (2, 1, 3) \quad \text{或} \quad (x, y, z) = (-2, -1, -3).$$

驗算

代入 $(2, 1, 3)$：$yz = 3$，$zx = 6$，$xy = 2$，所以三條方程的左方分別是 $6 + 6 - 10 = 2$、$3 - 6 + 4 = 1$ 和 $3 - 12 + 12 = 3$。三者全部吻合。用電腦搜尋所有由分數 p/q（其中 $|p| \leq 12$，$1 \leq q \leq 4$）組成的三元組，結果恰好找到上述兩組解；精確運算亦確認該線性方程組有唯一解 $(a, b, c) = (3, 6, 2)$。

常見錯誤

- 由 $(xyz)^2 = 36$ 出發，對每個變數各自開方，例如把 $x = \pm 2$、$y = \pm 1$、$z = \pm 3$ 當作互不相干地寫出來。這樣會得到八個三元組，但只有兩個成立：三個正負號是互相牽連的，因為 xyz 只有一個正負號。

► 遺漏負根，只給出 $(2, 1, 3)$。

STEP 之外

把棘手的式子重新命名，令非線性問題變成線性問題，這個技巧隨處可見：由取對數來擬合 $y = Ae^{kx}$ 這類曲線，到用代換法解微分方程（differential equation），都是同一道理。方程組一旦成為線性，矩陣和行列式便能立即告訴你解是否唯一，而這正是線性代數（linear algebra）入門課程的起點。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）正是本着這種精神講解消元法和行列式。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。