詳細解答

STEP II 1996，第 13 題

概率與統計 • 網格上的隨機漫步

STEP II 1996，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/96-s2-q13

關鍵思路

這條恆等式就是范德蒙恆等式（Vandermonde's identity）：比較等號兩邊 t^n 的係數（coefficient）即可。至於步行的問題，有用的是一個每走一步都恰好改變一的數量：你身處的位置在我的酒店以北多少個街段，加上以西多少個街段。我每走一步，它就增加 1；我的朋友每走一步，它就減少 1。因此我們只可能在某一個時刻、在某一條由路口組成的對角線上相遇，而相遇的概率（probability）正好就是恆等式中的那個和。

解答

恆等式

$(1+t)^n$ 中 t^r 的係數是 $\binom{n}{r}$。乘積 $(1+t)^n(1+t)^n$ 中含 t^n 的項，來自在第一個因式中選 t^r，並在第二個因式中選 t^{n-r}，其中 $r = 0, 1, \ldots, n$。所以左邊 t^n 的係數是

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}\binom{n}{n-r},$$

而右邊的是 $\binom{2n}{n}$。令兩者相等，便得到所求的恆等式。把同樣的論證用於 $(1+t)^a(1+t)^b = (1+t)^{a+b}$，可得更一般的版本

$$\sum_{r} \binom{a}{r}\binom{b}{n-r} = \binom{a+b}{n}, \qquad (*)$$

稍後我們會用到它。

我們可以在哪裏相遇

把我的酒店放在原點，以街段為單位，x 向東量度，y 向北量度，於是我朋友的酒店位於 $(-n, n)$。對任何位置定義

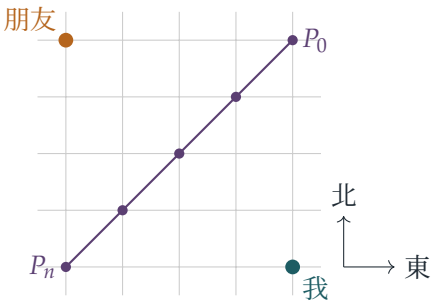
$$D = y - x,$$

即該位置在我的酒店以北的街段數加上以西的街段數。向北走或向西走會使 D 增加 1；向南走或向東走則使它減少 1。所以步行了 t 分鐘之後，我有 $D = t$，而我的朋友從 $D = 2n$ 出發，有 $D = 2n - t$。這在每一瞬間都成立，包括走到街段中途的時候，因為 D 隨着我們步行而均勻地變化。

要在同一時間身處同一地點，我們的 D 值必須相等，所以 $t = 2n - t$，得出 $t = n$。因此我們只可能在恰好 n 分鐘之後相遇，而且是在一個滿足 $y - x = n$ 的路口。我走的 n 步使我留在區域 $-n \le x \le 0$、$0 \le y \le n$ 之內，所以可能的相遇點是

$$P_r = (-r, n - r), \qquad r = 0, 1, \ldots, n,$$

也就是正方形對角線上的 $n + 1$ 個路口，這條對角線連接我的酒店以北 n 個街段的路口與以西 n 個街段的路口。（特別地，我們永遠不可能在街段中途擦身而過。）



上圖所示為 $n = 4$ 的情況：相遇點就是對角線上的圓點。

相遇的概率

n 分鐘後我位於 P_r，當且僅當我的 n 步之中有 r 步向西、$n - r$ 步向北。每一個由 n 步組成的序列，概率都是 2^{-n}，所以

$$\mathrm{P}(\text{我在}P_r) = \binom{n}{r}\frac{1}{2^n}.$$

我的朋友從 $(-n, n)$ 出發，走 n 步後到達 $P_r = (-r, n - r)$，當且僅當其中 $n - r$ 步向東、r 步向南，其概率為 $\binom{n}{n-r}2^{-n}$。我們兩人的步行互相獨立（independent），而對不同的 r，「我們兩人都在 P_r」這些事件是互斥（mutually exclusive）的，所以

$$\mathrm{P}(\text{相遇}) = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\binom{n}{n-r}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n},$$

這裏用了上述恆等式。

遲 $2k$ 分鐘出發

現在由我朋友出發的一刻起計算時間 T。當 $T \geq 2k$ 時，我已步行了 $T-2k$ 分鐘，所以我有 $D = T-2k$，而我的朋友有 $D = 2n-T$。兩者只在 $T = n+k$ 時相等。這時我走了 $n-k$ 步（這裏 $k \leq n$，所以這是一個非負整數），而我的朋友走了 $n+k$ 步。由於 $n+k \geq 2k$，我的朋友不可能趁我還在酒店裏熟睡時走到對角線靠我這一邊。同樣，我們只可能在路口相遇，絕不會在街段中途相遇。

走了 $n-k$ 步之後，若其中 r 步向西，我便位於 $(-r, n-k-r)$，其概率為 $\binom{n-k}{r}2^{-(n-k)}$。我的朋友位於同一點，當且僅當她的 $n+k$ 步之中有 $n-r$ 步向東、$k+r$ 步向南，其概率為 $\binom{n+k}{n-r}2^{-(n+k)}$。像之前一樣對 r 求和，

$$\mathrm{P}(\text{相遇}) = \frac{1}{2^{n-k}2^{n+k}}\sum_{r=0}^{n-k}\binom{n-k}{r}\binom{n+k}{n-r} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n},$$

這裏用了 $(*)$，其中 $a = n-k$ 及 $b = n+k$。

想一想 為甚麼睡過頭竟然完全沒有影響？

從我朋友的角度看這次步行，量度我相對於她的位置。她的每一步（向南或向東）和我的每一步（向北或向西），都使我相對於她向北移動一個街段或向西移動一個街段，兩者的概率各為 $\frac{1}{2}$，而且互相獨立。起初我們在兩個方向上各相距 n 個街段，而我們相遇，當且僅當合共 $2n$ 步（我的加上她的）恰好由 n 次「向北」和 n 次「向西」的相對移動組成。哪一步由誰來走並不重要，所以無論這 $2n$ 步怎樣分配，是 n 和 n，還是 $n-k$ 和 $n+k$，答案都是 $\binom{2n}{n}/2^{2n}$。關於 k 的條件只是確保我真的能走完自己那一份。當 n 很大時，這個概率約為 $1/\sqrt{\pi n}$，數值很小，而且無論我有沒有睡過頭偶數分鐘，它都一樣。

$n = 1$，遲一分鐘

現在我有 $D = T-1$，而我的朋友有 $D = 2-T$，兩者只在 $T = \frac{3}{2}$ 時相等，那時我們兩人都正走到街段的中點。所以我們永遠不可能在同一時間身處同一個路口；如果相遇是指在路口相遇，概率就是 0。奇偶性（parity）改變了：總步數現在是奇數。

如果把在街段中途擦身而過也算作相遇（兩個真實的人自然會這樣算），那麼當我們沿同一個街段相向而行時，便會在 $T = \frac{3}{2}$ 相遇。在 $T = 1$ 時，我仍在我的酒店 $(0,0)$，而我的朋友在 $(0,1)$ 或 $(-1,0)$。之後我們會相遇的情況是：她在 $(0,1)$ 並向南走而我向北走，或者她在 $(-1,0)$ 並向東走而我向西走。每種情況的概率都是 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$，所以

$$\mathrm{P}(\text{在街段中途相遇}) = \tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{4}.$$

驗算

- 當 $n = 1$ 而沒有延誤時，若我向北走而她向東走，或我向西走而她向南走，我們便會相遇：概率為 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = \binom{2}{1}/4$。
- 我們用電腦對 $n \leq 5$ 及所有容許的 k 列舉了每一對步行路線，每半分鐘追蹤兩人的位置一次。不論延誤多少個偶數分鐘，相遇的概率都是 $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{5}{16}, \frac{35}{128}, \frac{63}{256}$，而且相遇總是發生在所預測的那一個時刻。當 $n = 1$ 而延誤一分鐘時，僅有的相遇都是在 $T = \frac{3}{2}$ 於街段中途發生，總概率為 $\frac{1}{4}$。
- 當 $n = 100$ 時，$\binom{200}{100}/4^{100} \approx 0.0563$，與 $1/\sqrt{100\pi} \approx 0.0564$ 十分接近。

常見錯誤

- 以為我們可以在任何時間於正方形內任何地方相遇。數量 $y - x$ 把相遇限定在一個時刻和一條對角線上。
- 只把概率平方而沒有對各個相遇點求和，或者忘記了我朋友到達 P_r 所需的步數是對調的（她需要向東走 $n - r$ 步，而不是 r 步）。

STEP 之外

相對位置的論證是一種耦合（coupling）：兩個獨立的隨機漫步（random walk）被一個長度為兩者之和的漫步取代，這就是 $\binom{2n}{n}/4^n$ 不斷重現的原因。同一個數量也是直線上的簡單對稱隨機漫步在 $2n$ 步之後回到原點的概率，而它按 $1/\sqrt{\pi n}$ 衰減（由斯特靈公式（Stirling's formula）得出），正是波利亞（Pólya）定理的關鍵：該定理指出，一維和二維的這類漫步會以概率 1 返回起點。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）討論了隨機漫步和這些返回概率。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。