詳細解答

STEP II 1996，第 11 題

力學 • 簡諧運動

STEP II 1996，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/96-s2-q11

關鍵思路

以弦線的伸長量為研究對象，它其實就是質點相對於升降機的位置。在地面參考系（ground frame）中寫出質點的牛頓第二定律（Newton's second law），再減去升降機的已知加速度：剩下的就是繞着一個移位後的中心進行的簡諧運動（simple harmonic motion，簡稱 SHM）。只要伸長量保持為正，弦線就一直拉緊，而簡諧運動的解正好告訴你伸長量最低可以去到多少。當升降機停止加速時，只有振動的中心會移動；質點相對於升降機的位置和速度都原封不動地延續下去，由此便可求出新的振幅（amplitude）。

解答

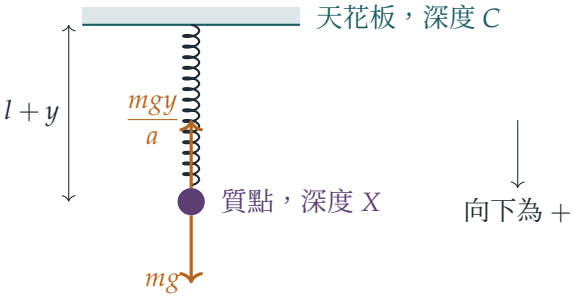
我們把質點的質量設為 m，並把弦線當作輕質彈性弦線，其彈性模量（modulus）為 λ，在拉緊時服從胡克定律（Hooke's law）。全題之中，y 表示弦線長度超出其自然長度 l 的量，所以開始時 $y = a$。只有這樣理解，才與題目給出的微分方程（differential equation）吻合。假如 y 是由原來的平衡長度 $l + a$ 量起，右邊便會是 $-f$。

運動方程

在最初的平衡狀態中，張力（tension）$\lambda a/l$ 與重量平衡，所以

$$\frac{\lambda a}{l} = mg \quad \Longrightarrow \quad \frac{\lambda}{l} = \frac{mg}{a},$$

而當伸長量為 $y > 0$ 時，張力為 mgy/a。



從固定於地面的一點起，向下量度深度：天花板位於深度 C，質點位於深度 X，所以 $X-C=l+y$。升降機以加速度 f 下降，所以 $\ddot{C}=f$。在弦線拉緊時，對質點沿鉛垂方向（以向下為正）分解力，得

$$m\ddot{X}=mg-\frac{mgy}{a}.$$

由於 $y=X-C-l$，我們有 $\ddot{y}=\ddot{X}-\ddot{C}=\ddot{X}-f$，因此

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{a}y=g-f,$$

這正是所要證明的。

弦線保持拉緊；振幅為 af/g

設 $\omega^2=g/a$。常數特解（particular solution）為 $y=(g-f)/\omega^2=a(g-f)/g$，所以通解（general solution）為

$$y=a-\frac{af}{g}+A\cos\omega t+B\sin\omega t.$$

在 $t=0$ 時，質點處於原來的平衡位置，並隨升降機一起運動，所以 $y(0)=a$ 及 $\dot{y}(0)=0$。由此得 $A=af/g$ 及 $B=0$：

$$y=a-\frac{af}{g}+\frac{af}{g}\cos\omega t.$$

這是以 $y=a-af/g$ 為中心、振幅為 af/g 的簡諧運動。質點相對於升降機的位置是 $l+y$，所以質點相對於升降機以振幅 af/g 振動。

想一想 我們用了胡克定律，而它假設弦線是拉緊的。這不是循環論證嗎？

不是。我們先假設弦線拉緊然後求解，再檢查所得的解從未離開該假設成立的範圍。y 的最小值是

$$y_{\min}=a-\frac{2af}{g}=a\left(1-\frac{2f}{g}\right)>0,$$

因為 $f<g/2$。所以 y 保持為正，弦線一直拉緊，這個解前後一致。條件 $f<g/2$ 正是在這裏派上用場。

升降機停止加速之後

當 $t > T$ 時，我們有 $\ddot{C} = 0$，同樣的論證給出

$$\ddot{y} + \omega^2 y = g,$$

這是以 $y = a$（即自然的平衡伸長量）為中心的簡諧運動。設 $z = y - a$，則 $\ddot{z} + \omega^2 z = 0$。

? **想一想** 這段新運動的初始條件是甚麼？

升降機的加速度在 $t = T$ 時突變，但它的速度 $\dot{C}$ 不會突變，質點的位置和速度也不會。所以 $y = X - C - l$ 和 $\dot{y} = \dot{X} - \dot{C}$ 在 $t = T$ 時是連續的。由第一階段可知，在 $t = T$ 時，

$$z = \frac{af}{g}(\cos\omega T - 1), \qquad \dot{z} = -\frac{af}{g}\,\omega \sin\omega T.$$

對於簡諧運動 $\ddot{z} = -\omega^2 z$，振幅 R 在任何時刻都滿足 $R^2 = z^2 + \dot{z}^2/\omega^2$（這就是能量守恆（energy conservation），或者說是把恆等式 $\cos^2 + \sin^2 = 1$ 應用於 $z = R\cos(\omega t + \varepsilon)$）。因此

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{a^2 f^2}{g^2}\left[(1 - \cos\omega T)^2 + \sin^2\omega T\right] \\ &= \frac{a^2 f^2}{g^2}\,(2 - 2\cos\omega T) \\ &= \frac{a^2 f^2}{g^2}\cdot 4\sin^2 \tfrac{1}{2}\omega T, \end{aligned}$$

其中用了 $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{1}{2}\theta$。所以新的振幅是

$$R = \frac{2af}{g}\,|\sin\tfrac{1}{2}\omega T|,$$

這正是所要證明的。

弦線始終不會鬆弛：現在的最小伸長量是

$$a - R \;\geq\; a - \frac{2af}{g} = a\left(1 - \frac{2f}{g}\right) > 0,$$

同樣是因為 $f < g/2$。所以 $y > 0$ 自始至終成立，運動方程一直有效。

驗算

- 若 T 是週期的整數倍，即 $\omega T = 2k\pi$，則在升降機停止加速的一刻，質點剛好回到 $y = a$，並相對於升降機靜止。公式給出的振幅為 0：質點靜止懸掛着，理應如此。
- 若 ωT 是 π 的奇數倍，質點位於最高點 $y = a - 2af/g$，並相對於升降機瞬時靜止。新的中心是 $y = a$，所以振幅為 $2af/g$，正是公式的最大值。

- 在數值上，我們對隨機選取的 a、$f < g/2$ 和 T，在地面參考系中逐步計算整個運動（包括升降機和質點，並在弦線鬆弛時把張力關掉）。例如，當 $a = 0.546$、$f/g = 0.337$ 及 $\omega T = 15.27$ 時，算出的振幅為 0.18380 和 0.35864，與 af/g 和 $\frac{2af}{g}|\sin\frac{1}{2}\omega T|$ 吻合至六位有效數字，而伸長量從未低於 $a - 2af/g$。

常見錯誤

- 由原來的平衡長度 $l + a$ 量度 y。這樣右邊便會是 $-f$，而不是 $g - f$。
- 在第二階段重新開始時取 $\dot{y} = 0$。在 $t = T$ 時，質點一般正相對於升降機運動，而這個速度對振幅是有貢獻的。
- 弄錯 f 的正負號。升降機向下加速，會把有效重力減至 $g - f$，所以振動的中心會上升。

STEP 之外

減去升降機的加速度，等同於在加速參考系（accelerating frame）中考慮問題：在這個參考系裏，均勻加速度 f 的作用就像一個額外的重力場 $-f$。這個想法引出慣性力（fictitious forces），最終通往愛因斯坦（Einstein）的等效原理（equivalence principle）。第二階段是振子受階躍式變化的力驅動的一個簡單例子。它的響應取決於階躍發生在振動的哪個時刻，而處理這類問題的一般工具是格林函數（Green's functions），亦即杜哈梅原理（Duhamel's principle）。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）正是以這種觀點處理非慣性參考系（non-inertial frames）和振子。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。