詳細解答

STEP II 1996，第 10 題

力學 • 由旋轉輪拋出的拋體

> **STEP II 1996，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q10

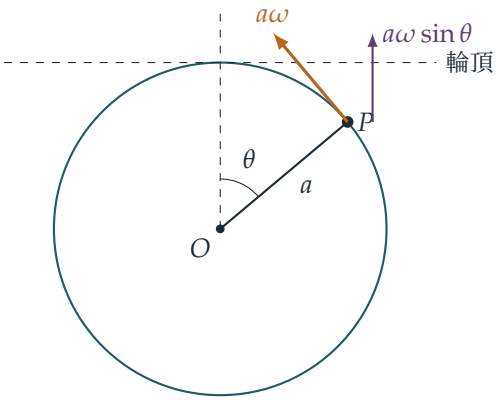
關鍵思路

在鬆手的一刻，女主角就成為一個拋體（projectile），其初始位置和初速度完全取決於她當時在輪上的位置。高度只與豎直方向的運動有關，所以她所能到達的最大高度，等於鬆手時的高度，加上速度的豎直分量為她額外換來的高度。這樣，高度便是單一個鬆手角度的函數，而問題就變成：這個函數在甚麼情況下可以超越輪頂？它的最大值又是多少？

解答

建立模型

把女主角視為隨輪緣運動的質點（particle），並忽略空氣阻力。設 O 為輪的中心，並假設她在點 P 鬆手，其中 OP 與豎直向上方向的夾角為 θ，$0 \leq \theta \leq \pi$。她在輪緣上的速率為 $a\omega$，方向沿 P 點的切線（tangent）。



P 點的切線垂直於 OP，所以它與水平方向的夾角為 θ。如果她鬆手時正朝着輪頂運動，她的速度的向上分量為 $a\omega\sin\theta$（圖中以紫紅色標示）。如果她正在遠離輪頂，她的豎直速度向下或為零，因此她永遠不會升到高於鬆手點的位置，而鬆手點不會高於輪頂；這些鬆手情況可以不予考慮。

鬆手時她在 O 之上的高度為 $a\cos\theta$。在只受重力作用的情況下，她的豎直速度由 $a\omega\sin\theta$ 減至零，根據 $v^2 = u^2 - 2gs$，她會再上升 $(a\omega\sin\theta)^2/(2g)$。所以她在輪頂之上所能到達的最大高度為

$$H(\theta) = a\cos\theta + \frac{a^2\omega^2\sin^2\theta}{2g} - a.$$

設 $c = \cos\theta \in [-1,1]$ 及 $k = \dfrac{a\omega^2}{2g}$。那麼 $\sin^2\theta = 1 - c^2$，而

$$\begin{aligned}\frac{H}{a} &= c - 1 + k(1-c^2)\\ &= (1-c)[k(1+c)-1].\end{aligned}$$

求 ω_0

當 $c = 1$（在輪頂鬆手）時，$H = 0$，正如所料。當 $c < 1$ 時，因子 $1-c$ 為正，所以 $H > 0$ 當且僅當 $k(1+c) > 1$。

> **想一想** 在 c 的容許取值範圍內，$k(1+c)$ 最大可以有多大？

由於 $c < 1$，$k(1+c)$ 可取 $[0, 2k)$ 內的每一個值，但永遠達不到 $2k$。所以：

- 若 $2k > 1$，我們可以選取足夠接近 1 的 $c < 1$，使得 $k(1+c) > 1$，她便能升到輪頂之上；
- 若 $2k \le 1$，則對每一個 $c < 1$ 都有 $k(1+c) < 2k \le 1$，所以在每一個鬆手點都有 $H \le 0$，她永遠無法升到輪頂之上。

條件 $2k \le 1$ 即 $a\omega^2 \le g$。注意邊界情況 $\omega^2 = g/a$ 屬於「不可能」的一方，所以這樣的 ω 的最大值存在，並且是

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}.$$

（這也是另一個情況下的臨界角速度（angular speed）：假如有一個質點靠在輪的外側並位於輪頂，它在這個角速度下便會剛好脫離接觸，因為向心加速度（centripetal acceleration）$a\omega^2$ 等於 g。）

$\omega > \omega_0$ 時的最大高度

現在 $2k = a\omega^2/g = \omega^2/\omega_0^2 > 1$。作為 c 的函數，

$$\frac{H}{a} = -kc^2 + c + k - 1$$

是一個開口向下的二次函數（quadratic），在其導數（derivative）$1 - 2kc$ 為零之處取得最大值，即

$$c = \frac{1}{2k} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}.$$

這個值嚴格介乎 0 與 1 之間，所以它是一個容許的鬆手點（在輪頂稍前的位置），並且給出整個 $[-1, 1]$ 上的最大值。代入後得

$$\frac{H_{\max}}{a} = -\frac{1}{4k} + \frac{1}{2k} + k - 1 = k - 1 + \frac{1}{4k}.$$

由於 $k = \frac{1}{2}\,\omega^2/\omega_0^2$，因而 $\frac{1}{4k} = \frac{1}{2}\,\omega_0^2/\omega^2$，

$$H_{\max} = \frac{a}{2}\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) = \frac{a}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2,$$

這正是所求的結果。她只要在 $\cos\theta = \omega_0^2/\omega^2$ 之處、正朝着輪頂運動時鬆手，便可達到這個高度。

驗算

- 當 $\omega = \omega_0$ 時，公式給出 0，與邊界情況吻合；而當 ω 很大時，它的增長有如 $a\omega^2/(2\omega_0^2) = a^2\omega^2/(2g)$，這正是一個質點從 O 的水平位置以速率 $a\omega$ 豎直上拋所能到達的高度。事實上，當 ω 很大時，最佳的鬆手位置接近 $\theta = \frac{\pi}{2}$，該處的速度是豎直的。
- 單位：ω/ω_0 是無量綱（dimensionless）的，所以 $H_{\max}$ 是一個長度。
- 數值上，取 $a = 2\,\text{m}$ 及 $\omega = 2\omega_0$，公式給出 $\frac{a}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25\,\text{m}$。由鬆手點 $\cos\theta = \frac{1}{4}$ 開始逐步計算拋體的運動，會得到相同的數值；而搜尋所有鬆手角度後，亦確認沒有其他鬆手位置能做得更好。

常見錯誤

- 從輪的中心而非輪頂量度高度：H 中的 $-a$ 是不可或缺的。
- 以為最佳的鬆手位置是 $\theta = \frac{\pi}{2}$，即她的速度為豎直之處。這樣做只是令額外上升的高度最大，而不是令總高度最大。
- 忘記檢查最佳的 $c = \omega_0^2/\omega^2$ 是否確實位於 $[-1, 1]$ 之內。

STEP 之外

這裏所用的方法，即把一個量寫成單一控制變量的函數然後求最優值，是最優控制（optimal control）問題的最簡單形式。與之十分相近的是軌跡的包絡線（envelope of trajectories，即「安全拋物線」）：從輪上各個鬆手點出發所能到達的所有點的邊界，你可以用同一類判別式（discriminant）論證把它求出來。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）以大學一年級的程度闡述拋體運動和轉動。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。