詳細解答

STEP II 1996，第 1 題

純數學 • 二項式級數的係數

> **STEP II 1996，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q1

關鍵思路

三個括號相乘後，某一項的係數（coefficient）等於一個總和：從每個括號各選一項，使各項的冪次加起來等於目標冪次，再把所有這樣的選法加起來。在 (i) 中，這意味著要小心整理一個有限的計數。在 (ii) 中，係數 $1, -2, 3, -4, \ldots$ 可以認出是 $(1+x)^{-2}$ 的係數，而括號內多出來的項，正好足以令截斷在 x^6 處不產生任何影響。

解答

第 (i) 部分

把括號寫成 $P(x) = \sum_{k=0}^{4} a_k x^k$，其中

$$a_k = (-1)^k (k+1), \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

從三個因式中分別選出 $a_p x^p$、$a_q x^q$、$a_r x^r$，當且僅當 $p+q+r = 6$ 時才會對 x^6 有貢獻，所以我們要求的係數是

$$\sum_{\substack{p+q+r=6 \\ 0 \le p,q,r \le 4}} a_p a_q a_r.$$

每一項的符號都是 $(-1)^{p+q+r} = (-1)^6 = +1$，因此可以不理會符號，只需把乘積 $(p+1)(q+1)(r+1)$ 加起來。

> **想一想** 怎樣才能確保沒有遺漏任何一種指數的選法，也沒有重複計算？

先列出所有總和為 6、且每個數都不超過 4 的無序三元組 $\{p, q, r\}$，然後乘以從三個（可區分的）括號中取出這些指數的次序數目：若三個數各不相同，有 6 種次序；若恰好有

兩個相等，有 3 種；若三個都相等，則只有 1 種。

指數	乘積 $(p+1)(q+1)(r+1)$	次序數目	貢獻
$4,2,0$	$5\cdot 3\cdot 1=15$	6	90
$4,1,1$	$5\cdot 2\cdot 2=20$	3	60
$3,3,0$	$4\cdot 4\cdot 1=16$	3	48
$3,2,1$	$4\cdot 3\cdot 2=24$	6	144
$2,2,2$	$3\cdot 3\cdot 3=27$	1	27

以上已包括所有可能：最大的數只能是 4、3 或 2（不可能更小，因為 $3\times 1<6$；也不可能超過 4），而對於每個最大的數，我們已列出把餘下部分拆成兩個較小部分的所有方法。相加得

$$90+60+48+144+27=369,$$

所以 x^6 的係數是 $\boxed{369}$。

第 (ii) 部分

現在括號是 $Q(x)=\sum_{k=0}^{6}(-1)^k(k+1)x^k$。二項展開式（binomial expansion）在 $|x|<1$ 時成立，給出

$$(1+x)^{-2}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2}{k}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)x^k,$$

這是因為 $\binom{-2}{k}=\frac{(-2)(-3)\cdots(-k-1)}{k!}=(-1)^k(k+1)$。所以 $Q(x)$ 就是 $(1+x)^{-2}$ 的展開式在 x^6 項之後截斷的結果：

$$(1+x)^{-2}=Q(x)+x^7R(x)$$

其中 $R(x)$ 是某個冪級數（power series）。

? **想一想** 為甚麼缺少了的尾段 $x^7R(x)$ 不會影響立方中 x^6 的係數？

取立方，得

$$(1+x)^{-6}=Q(x)^3+3Q(x)^2\,x^7R(x)+3Q(x)\,x^{14}R(x)^2+x^{21}R(x)^3.$$

第一項之後的每一項都是 x^7 乘以一個冪級數，所以不含任何低於 x^7 的 x 的冪。因此 $Q(x)^3$ 中 x^6 的係數等於 $(1+x)^{-6}$ 中 x^6 的係數。（換個說法：指數加起來等於 6 的乘積，絕不可能用到任何一個因式中次數為 7 或以上的項。）

再用一次二項展開式，

$$\binom{-6}{6}=\frac{(-6)(-7)(-8)(-9)(-10)(-11)}{6!}=\frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{720}=\binom{11}{5}=462.$$

所以 $Q(x)^3$ 中 x^6 的係數是 $\boxed{462}$。

驗算

第 (ii) 部分可以獨立地驗證第 (i) 部分。兩個括號的分別只在於 $-6x^5$ 和 $7x^6$ 這兩項，所以 $462-369$ 應該等於所有用到其中一項的貢獻的總和。用到 $7x^6$ 的項，必須從另外兩個括號各取 1：有 3 個位置，每個給出 7，合共 21。用到 $-6x^5$ 的項，必須從另外兩個括號取 $-2x$ 和 1：有 $3\times 2=6$ 種排法，每種給出 $(-6)(-2)(1)=12$，合共 72。果然 $21+72=93=462-369$。用電腦把立方直接乘開，亦得出 369 和 462。

常見錯誤

- 忘記計算次序：指數 $4,2,0$ 可以用 6 種方式從三個括號中取得，而不是 1 種。
- 在第 (i) 部分把含有 5 或 6 的三元組也計算在內，但該括號只到 x^4 為止。
- 逐項擔心符號：由於指數的和總是 6，每一個貢獻都是正數。

STEP 之外

(ii) 中的論證是形式冪級數（formal power series）理論的起點：級數可以逐個係數相乘，完全不必考慮收斂（convergence）問題，而乘積中 x^n 的係數只取決於每個因式中直至 x^n 為止的各項。以這種方式透過生成函數（generating function）來處理數列，是一種強大的計數工具；例如，$(1-x)^{-m}$ 中 x^n 的係數，就是把 n 寫成 m 個非負整數的有序和的方法數目。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 進階題解）收錄了更多這類展開式的 STEP 式練習。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。