詳細解答

STEP I 1996，第 9 題

力學 • 彈性繩與能量

> **STEP I 1996，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q9

關鍵思路

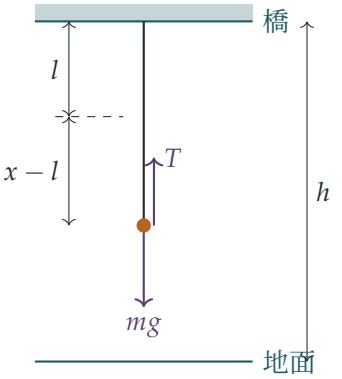
這一題從頭到尾都是能量的問題。只有重力和繩的張力（tension）在作功，而兩者都是守恆力（conservative force），所以我們根本不必完整地解運動方程（equation of motion）。「僅僅避過地面」的意思是：她到達地面的一刻，速率剛好為零。最大速率出現在加速度變號之處，也就是張力與她的重量互相平衡的位置。

解答

我們把跳躍者視為一個從橋上由靜止出發的質點（particle），把繩視為輕繩並服從胡克定律（Hooke's law），同時忽略空氣阻力。設 x 為她已下落的距離。當 $x \leq l$ 時，繩是鬆弛的，她處於自由下落（free fall）狀態。當 $x > l$ 時，伸長量（extension）為 $x - l$，由胡克定律得張力

$$T = \frac{mg}{k} \cdot \frac{x - l}{l},$$

而繩中儲存的彈性勢能（elastic energy）為 $\frac{mg}{k} \cdot \frac{(x-l)^2}{2l}$。



橋的高度

在最低點，她瞬間靜止。她僅僅避過地面，所以這個最低點就是地面本身，即 $x = h$。顯然 $h > l$：假如繩從未拉緊，她便會一直自由下落，並以相當的速率撞向地面。由離開橋面到最低點，動能（kinetic energy）在開始和結束時都是零，所以失去的重力勢能全部轉移到繩中：

$$mgh = \frac{mg}{k} \cdot \frac{(h-l)^2}{2l}.$$

兩邊乘以 $2kl/(mg)$，得 $2klh = (h-l)^2 = h^2 - 2hl + l^2$，所以

$$h^2 - 2hl(k+1) + l^2 = 0,$$

這正是所需的結果。由二次公式（quadratic formula），

$$h = l(k+1) \pm l\sqrt{(k+1)^2 - 1} = l\left(k + 1 \pm \sqrt{k^2 + 2k}\right).$$

? **想一想** 我們要的是哪一個根？另一個根又為甚麼會出現？

由於 $k > 0$，我們有 $\sqrt{k^2+2k} > \sqrt{k^2} = k$，所以取負號時會得出 $h < l(k+1-k) = l$。但能量方程假設了繩被拉長了 $h - l$，這只有在 $h > l$ 時才有意義。這個多餘的根來自平方：對於一個繩實際上無法提供的「壓縮」，它給出相同的 $(h-l)^2$ 值。（兩根之積為 l^2，所以其中一個大於 l，另一個則小於它。）因此

$$h = l\left(k + 1 + \sqrt{k^2 + 2k}\right).$$

最大速率

繩仍然鬆弛時，她以 g 向下加速。繩一旦拉緊，沿向下方向應用牛頓第二定律（Newton's second law），得

$$m\ddot{x} = mg - \frac{mg}{k} \cdot \frac{x-l}{l}.$$

當 $x - l < kl$ 時，此式為正，其後則為負。所以她一直加速，直至伸長量為 kl，即張力等於她的重量的那一點，此後便開始減速。因此她的最大速率在 $x = l + kl$ 處達到。由橋面到這一點應用能量守恆（conservation of energy），

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}mv^2 &= mg(l+kl) - \frac{mg}{k}\cdot\frac{(kl)^2}{2l}\\ &= mgl(1+k) - \tfrac{1}{2}mgkl.\end{aligned}$$

乘以二再除以 m，

$$v^2 = 2gl + 2kgl - kgl = (k+2)gl,$$

這正是所需的結果。

驗算

- 當 $k \to 0$ 時，繩變得非常硬。這時 $h \to l$（她幾乎沒有把繩拉長），而 $v^2 \to 2gl$，即下落距離 l 後的自由下落速率；這是合理的，因為繩幾乎立刻把她停住。
- 隨機選取 k 和 l，以數值方法逐步求解運動方程，所得的最低點和最大速率與公式吻合至小數點後五位。例如，$k = 1.5$、$l = 10\,\mathrm{m}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ 給出 $h = 10(2.5 + \sqrt{5.25}) \approx 47.9\,\mathrm{m}$ 和 $v^2 = 343$，所以 $v \approx 18.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$。

常見錯誤

- 以為最大速率出現在繩剛拉緊的一刻。那時她仍在加速，因為張力為零。
- 計算彈性勢能時，用了整段下落距離 x，而不是伸長量 $x - l$。
- 保留 h 的兩個根，而沒有檢查是否 $h > l$。

STEP 之外

繩一旦拉緊，運動便是以平衡伸長量 kl 為中心的簡諧運動（simple harmonic motion），所以下落的後半段是正弦曲線的一部分，角頻率（angular frequency）為 $\sqrt{g/(kl)}$。像這樣在自由下落與振子之間切換的分段系統，正好讓人初步認識能量方法和相平面（phase plane）圖像如何處理不光滑的力。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教材）在這個程度上仔細地闡述了能量守恆和振動。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。