詳細解答

STEP I 1996，第 8 題

純數學 • 循環小數

> **STEP I 1996，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q8

關鍵思路

循環的數字節其實是一個喬裝了的等比級數（geometric series）：每重複一次，數字節就比上一次向右移 k 個位，亦即乘以 10^{-k}。第 (i) 部分是最簡單的情況。在第 (ii) 部分，我們把展開式分成開始循環之前的部分（一個有限小數）和循環的尾段（一個等比級數），結果兩部分都是整數除以十的冪或除以 $10^k - 1$。

解答

第 (i) 部分

數字節 38 每兩個位重複一次，所以

$$\begin{aligned} 0.383838\ldots &= \frac{38}{100} + \frac{38}{100^2} + \frac{38}{100^3} + \cdots \\ &= \frac{38/100}{1 - 1/100} = \frac{38}{99}, \end{aligned}$$

這裏把公比（ratio）為 $\frac{1}{100}$ 的等比級數求和；由於 $|\frac{1}{100}| < 1$，這樣做是容許的。因為 $38 = 2 \times 19$ 與 $99 = 3^2 \times 11$ 沒有公共的質因數（prime factor），所以這已是最簡分數（lowest terms）：

$$0.383838\ldots = \frac{38}{99}.$$

第 (ii) 部分

（題目印出的展開式 $0 \cdot a_1 a_2 a_2 \cdots$ 是 $0 \cdot a_1 a_2 a_3 \cdots$ 之誤。）每個 a_n 都是 0 至 9 的數字，而

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

我們在 $n = N$ 處把這個和分開。

首 N 個數字。 設 b 為十進制數字依次是 $a_1 a_2 \ldots a_N$ 的整數（容許開首有零），即

$$b = \sum_{n=1}^{N} a_n 10^{N-n}.$$

於是

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{10^n} = \frac{1}{10^N} \sum_{n=1}^{N} a_n 10^{N-n} = \frac{b}{10^N}.$$

尾段。 條件 $a_{n+k} = a_n$ 對所有 $n > N$ 成立，反覆運用它，可得對所有 $m \geq 0$ 及 $1 \leq j \leq k$ 都有 $a_{N+mk+j} = a_{N+j}$（對 m 用歸納法（induction）：下標 $N + (m-1)k + j$ 大於 N，所以可以給它加上 k）。因此在第 N 個位之後，展開式就是數字節 $a_{N+1} a_{N+2} \ldots a_{N+k}$ 不斷重複。設 c 為由這些數字組成的整數，

$$c = \sum_{j=1}^{k} a_{N+j} 10^{k-j}.$$

把尾段每 k 項分成一組；由於所有項均為非負，而且級數收斂（converges），這樣分組是容許的。對給定的 $m \geq 0$，相應的一組是

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{a_{N+mk+j}}{10^{N+mk+j}} = \frac{1}{10^{N+(m+1)k}} \sum_{j=1}^{k} a_{N+j} 10^{k-j} = \frac{c}{10^N} \left(\frac{1}{10^k} \right)^{m+1}.$$

? **想一想** 為甚麼每一組恰好是前一組的 10^{-k} 倍？

由第 m 組到第 $m+1$ 組，所用的數字相同（因為有週期性（periodicity）），但每個數字都向右多移了 k 個位，於是每一項都除以 10^k。這就是隱藏在循環小數（recurring decimal）裏的等比級數。

把公比為 $10^{-k} < 1$ 的等比級數求和，

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \frac{c}{10^N} \cdot \frac{10^{-k}}{1 - 10^{-k}} = \frac{c}{10^N (10^k - 1)}.$$

把各部分合起來。 把兩部分相加，

$$x = \frac{b}{10^N} + \frac{c}{10^N (10^k - 1)},$$

其中 b 是由首 N 個數字 $a_1 \ldots a_N$ 組成的整數，c 是由一個週期 $a_{N+1} \ldots a_{N+k}$ 組成的整數。這就是題目要求的形式。

有理性。 通分後，

$$x = \frac{b(10^k - 1) + c}{10^N(10^k - 1)}.$$

分子是整數，而由於 $k \geq 1$ 可得 $10^k - 1 \geq 9$，分母是正整數。所以 x 是兩個整數之比，即 x 是有理數（rational）。

驗算

- 第 (i) 部分是沒有循環前部分（pre-period）而 $k = 2$、$c = 38$ 的情況：公式給出 $38/(10^2 - 1) = 38/99$。（若取 $N = 1$，則 $b = 3$ 及 $c = 83$，而 $\frac{3}{10} + \frac{83}{990} = \frac{380}{990} = \frac{38}{99}$，結果一致。）
- 取 $0.12345345\ldots$，其中 $N = 2$、$k = 3$、$b = 12$、$c = 345$：$\frac{12}{100} + \frac{345}{100\times 999} = \frac{4111}{33300} = 0.1234534534\ldots$
- 我們還隨機選取了 500 組循環前部分和循環節，以精確算術把公式與展開式求和的結果比較；全部一致。

常見錯誤

- 忘記尾段的因子 10^{-N}：循環節由第 $N+1$ 個位開始，而不是由第 1 個位開始。
- 分母用了 10^k 而不是 $10^k - 1$：等比級數的首項是 $c\,10^{-N-k}$，而不是 $c\,10^{-N}$。
- 在 (i) 中沒有檢查是否最簡分數：要說明為甚麼 $\gcd(38, 99) = 1$。

STEP 之外

逆命題（converse）也成立：每個有理數的小數展開式最終都會循環，因為用 q 作長除法（long division）時只有 q 個可能的餘數，所以其中一個必定重複出現。因此，無理數（irrationals）正是小數展開式永不進入循環的那些實數。$1/q$ 的週期長度與 10 模 q 的階（order）有關，這是初嘗羣論（group theory）在數論中的滋味。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（高等算術）把這些關於同餘（congruences）和週期的想法闡述得十分精彩。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。