詳細解答

STEP I 1996，第 7 題

純數學 • 一階微分方程

> **STEP I 1996，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q7

關鍵思路

「以與水量成正比的速率流出」可以直接寫成一條一階微分方程（first-order differential equation）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky$，其中 $k > 0$，其解是一個指數函數（exponential）。把 e^{-k} 記作單一個數 b，指數函數便化為 b^t；同一個代換 $k = -\ln b$ 亦可用來改寫第 (ii) 部分的方程。該方程是線性的，所以用積分因子（integrating factor）便可完成。

解答

第 (i) 部分

水是流出的，所以 y 以與 y 成正比的速率減少：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky \qquad \text{其中常數} k > 0.$$

只要水箱內仍有水，便有 $y > 0$，所以可以分離變數（separate the variables）：

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int k\,\mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad \ln y = -kt + c.$$

當 $t = 0$ 時 $y = 1$，所以 $c = \ln 1 = 0$。因此

$$y = \mathrm{e}^{-kt} = \left(\mathrm{e}^{-k}\right)^t = b^t, \qquad \text{其中} b = \mathrm{e}^{-k}.$$

由於 $k > 0$，我們有 $0 < b < 1$；特別地，$b < 1$，正如題目所要求。留意以下結果，稍後會用到：

$$\ln b = -k, \qquad \text{所以} \qquad k = -\ln b > 0.$$

第 (ii) 部分

流出的情況與之前完全相同，速率為 ky，常數 k 亦不變；此外，水以速率 a 流入。所以淨變化率是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a - ky.$$

? **想一想** 這條方程只涉及 k，那麼 $\ln b$ 是從何而來的？

常數 b 是在第 (i) 部分以 $b = \mathrm{e}^{-k}$ 定義的，所以它只描述流出的情況，與其他因素無關；在這裏它仍然是同一個數。代入 $k = -\ln b$ 得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a + y\ln b$，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\ln b = a,$$

這就是所要求的方程。

這是一條關於 y 的常係數線性方程。積分因子是

$$\exp\left(-\int \ln b\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{e}^{-t\ln b} = b^{-t}.$$

全式乘以 b^{-t} 後，左方成為一個恰當導數（exact derivative），因為 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}b^{-t} = -b^{-t}\ln b$：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y\,b^{-t}) = a\,b^{-t}.$$

兩邊積分，並利用 $\int b^{-t}\,\mathrm{d}t = -\dfrac{b^{-t}}{\ln b}$（因 $\ln b \neq 0$ 而成立），

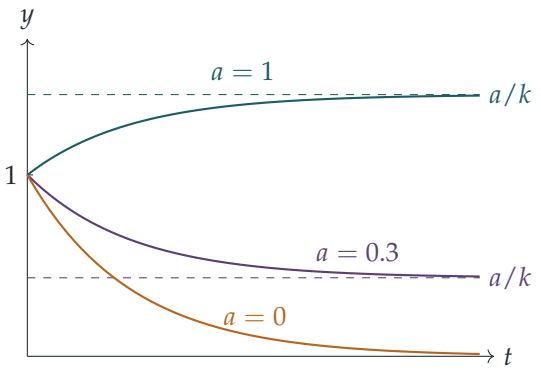
$$y\,b^{-t} = -\frac{a}{\ln b}\,b^{-t} + C.$$

當 $t = 0$ 時 $y = 1$，所以 $1 = -\dfrac{a}{\ln b} + C$，得 $C = 1 + \dfrac{a}{\ln b}$。全式乘以 b^t，

$$\begin{aligned} y &= -\frac{a}{\ln b} + \left(1 + \frac{a}{\ln b}\right) b^t \\ &= b^t + \frac{a\,(1 - b^t)}{-\ln b}. \end{aligned}$$

兩種形式都可以接受。第二種較易理解，因為 $-\ln b = \ln(1/b) > 0$：它就是第 (i) 部分的解 b^t，再加上由流入的水所產生的一個正項。

當 $t \to \infty$ 時，$b^t \to 0$（因為 $0 < b < 1$），所以 $y \to \dfrac{a}{-\ln b} = \dfrac{a}{k}$。這是平衡水平（equilibrium level），此時流出量 ky 剛好與流入量 a 相抵。若 $a > k$，水箱的水量會上升並趨向這個水平；若 $a < k$，水量則會下降並趨向這個水平。



草圖所示為 $b = \frac{1}{2}$（故 $k = \ln 2 \approx 0.693$）的情況，分別取 $a = 1$、$a = 0.3$，並畫出第 (i) 部分的曲線 $a = 0$ 以作比較。

驗算

- 取 $a = 0$：答案化為 $y = b^t$，即第 (i) 部分的結果。
- 當 $t = 0$ 時：$y = 1 + \frac{a(1-1)}{-\ln b} = 1$。
- 對 $y = b^t + \frac{a}{\ln b}(b^t - 1)$ 求導：得 $y' = b^t \ln b + ab^t$，而 $y \ln b + a = b^t \ln b + a(b^t - 1) + a = b^t \ln b + ab^t$，兩者吻合。
- 數值上，取 $b = \frac{1}{2}$、$a = 1$、$t = 2$，公式給出 $y \approx 1.3320$；以龍格－庫塔法（Runge–Kutta method）逐步求解該微分方程，得到相同的值，而一般而言，對隨機選取的 a、b、t，兩者相差約在 10^{-13} 以內。

常見錯誤

- 寫成 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky$，之後卻忘記了因為水是流出的，$k$ 必須是負數；正是這個符號令 $b < 1$ 必然成立。
- 在第 (ii) 部分把 b 當作一個新的未知數。它完全由流出的情況決定，所以 $\ln b = -k$ 可以直接沿用。
- 把 $\int b^{-t}\,\mathrm{d}t = -b^{-t}/\ln b$ 的符號弄錯；可用求導來檢查。

STEP 之外

這是最簡單的房室模型（compartment model）：一個水箱，輸入恆定，輸出與存量成正比。同一條方程亦可描述以穩定速率注入血液、再經腎臟清除的藥物，或者經電

阻器充電的電容器。每一個解都以指數方式趨向平衡值 a/k，這是穩定不動點（stable fixed point）的一個例子；當你學到微分方程組時，這個概念會變得十分重要。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科書）討論了一階線性方程，以及許多這類混合問題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。