詳細解答

STEP I 1996，第 6 題

純數學 • 三角函數求和與積分

> **STEP I 1996，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q6

關鍵思路

題目給出的恆等式（identity）正是為了裂項相消（telescoping）而設：若把和式 $\sum \cos kx$ 乘以 $2\sin\frac{1}{2}x$，每一項都會變成兩個正弦之差，而相鄰的差會互相抵消。一旦把 f 寫成餘弦之和，(ii) 中看似棘手的積分就變成單個餘弦的積分，其中大部分在 $[0,\pi]$ 上都等於零。

解答

以下 n 均為正整數。

第 (i) 部分

設 $S=\sum_{k=1}^{n}\cos kx$。乘以 $2\sin\frac{1}{2}x$，並逐項運用題目給出的公式，

$$\begin{aligned}2\sin\tfrac{1}{2}x\,S &= \sum_{k=1}^{n}\Big(\sin(k+\tfrac{1}{2})x-\sin(k-\tfrac{1}{2})x\Big)\\ &= (\sin\tfrac{3}{2}x-\sin\tfrac{1}{2}x)+(\sin\tfrac{5}{2}x-\sin\tfrac{3}{2}x)+\cdots+(\sin(n+\tfrac{1}{2})x-\sin(n-\tfrac{1}{2})x)\\ &= \sin(n+\tfrac{1}{2})x-\sin\tfrac{1}{2}x,\end{aligned}$$

因為每個中間項都以正負號各出現一次，互相抵消。因此

$$\sin(n+\tfrac{1}{2})x=\sin\tfrac{1}{2}x+2\sin\tfrac{1}{2}x\sum_{k=1}^{n}\cos kx.$$

當 $0<x\le\pi$ 時，$0<\frac{1}{2}x\le\frac{1}{2}\pi$，故 $\sin\frac{1}{2}x>0$，可以用它來除：

$$\mathrm{f}(x)=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x}=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kx,$$

這正是所要證明的結果。

第 (ii) 部分

想一想 f 在 $x = 0$ 處沒有定義。那麼 $\int_0^\pi \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ 這個積分到底有沒有意義？

有。根據第 (i) 部分，在 $0 < x \le \pi$ 上，函數 f 與餘弦多項式 $1 + 2\sum \cos kx$ 相等，而後者在整個 $[0, \pi]$ 上連續（continuous）（在 0 處的值為 $2n + 1$）。改變單獨一點的函數值，或讓該點沒有定義，都不會影響積分，所以我們可以改為對餘弦之和積分。

第一個積分。對每個整數 $k \ge 1$，

$$\int_0^\pi \cos kx\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin kx}{k}\right]_0^\pi = 0,$$

因為 $\sin k\pi = 0$。所以只有常數項留下來：

$$\int_0^\pi \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi 1\,\mathrm{d}x + 2\sum_{k=1}^{n} \int_0^\pi \cos kx\,\mathrm{d}x = \pi.$$

第二個積分。現在

$$\int_0^\pi \mathrm{f}(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x + 2\sum_{k=1}^{n} \int_0^\pi \cos kx \cos x\,\mathrm{d}x.$$

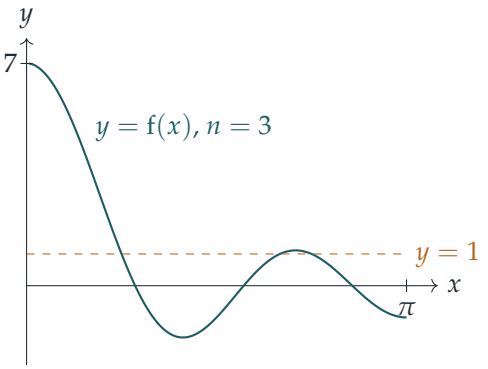
第一個積分是 $[\sin x]_0^\pi = 0$。至於其餘的積分，利用 $2\cos kx\cos x = \cos(k+1)x + \cos(k-1)x$：

$$2\int_0^\pi \cos kx\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos(k+1)x\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi \cos(k-1)x\,\mathrm{d}x.$$

這裏 $k+1 \ge 2$，所以第一個積分如上所述等於 0。第二個積分也等於 0，除非 $k - 1 = 0$，此時被積函數（integrand）是 1，積分等於 π。所以只有 $k = 1$ 的一項有貢獻，於是

$$\int_0^\pi \mathrm{f}(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \pi.$$

（假如容許 n 取 0，則 $\mathrm{f} \equiv 1$，這個積分就會是 0；對每個 $n \ge 1$，它都等於 π。）



這幅圖說明了為何第一個答案與 n 無關：0 附近那個高聳的尖峯（高度為 $2n+1$）被其後的振盪抵銷，淨面積始終等於常數項所佔的面積，即 π。

驗算

- 當 $x \to 0$ 時，$\sin(n+\frac{1}{2})x / \sin\frac{1}{2}x \to (2n+1)$，而餘弦之和在 $x=0$ 處的值為 $1+2n$。兩者吻合。
- 在 $x=\pi$ 處：$\mathrm{f}(\pi) = \sin(n+\frac{1}{2})\pi = (-1)^n$，同時亦有 $1+2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = (-1)^n$。
- 對 $n = 1, \ldots, 7$，以中點法則（midpoint rule）對原來的商式作數值積分，兩個積分都得出 3.14159265…，與 π 相符。

常見錯誤

- 忘記說明為何可以除以 $\sin\frac{1}{2}x$：它不等於零，正是因為 $0 < x \leq \pi$。
- 寫成對所有 k 都有 $\int_0^\pi \cos kx \cos x \,\mathrm{d}x = 0$，於是第二個積分得出 0；其實 $k=1$ 的一項給出 $\int_0^\pi \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi$。

STEP 之外

函數 f 就是狄利克雷核（*Dirichlet kernel*），是傅立葉級數（Fourier series）理論的核心對象。第 (ii) 部分的計算是正交性（orthogonality）的例子：$\cos kx$ 與 $\cos mx$ 相乘後在 $[0,\pi]$ 上的積分為零，除非 $k=m$。傅立葉係數正是這樣提取出來的，而把一個函數與狄利克雷核相乘再積分，就得到它的傅立葉級數的第 n 個部分和（partial sum）。至於這些部分和在甚麼情況下收斂（converge），嚴謹的論述可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本實分析入門教材）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。