詳細解答

STEP I 1996，第 5 題

純數學 • 複數的平方根

> **STEP I 1996，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q5

關鍵思路

每一部分都為下一部分鋪路。第 (i) 部分的重點是比較有理部分與無理部分，並告訴我們 $4-2\sqrt{3}$ 是一個完全平方（perfect square）。第 (ii) 部分要求一個複數平方根（complex square root），經過慣常的「比較實部與虛部」一步之後，問題便歸結為第 (i) 部分。第 (iii) 部分是一條二次方程，其判別式（discriminant）原來正是第 (ii) 部分那個數的四倍，所以我們需要的平方根早已準備好了。

解答

第 (i) 部分

展開得

$$(r+s\sqrt{3})^2 = (r^2+3s^2)+2rs\sqrt{3}.$$

我們希望這等於 $4-2\sqrt{3}$。由於 r 和 s 是有理數（rational number），r^2+3s^2 和 $2rs$ 也是有理數。若 $a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}$，其中 a,b,c,d 為有理數且 $b\neq d$，則 $\sqrt{3}=(a-c)/(d-b)$ 會是有理數，但事實並非如此。因此我們可以比較有理部分和 $\sqrt{3}$ 的係數：

$$r^2+3s^2=4, \qquad rs=-1.$$

於是 $r\neq 0$，所以 $s=-1/r$，而第一條方程變成

$$r^2+\frac{3}{r^2}=4 \iff r^4-4r^2+3=0 \iff (r^2-1)(r^2-3)=0.$$

若取 $r^2=3$，則 $r=\pm\sqrt{3}$，並非有理數。所以 $r^2=1$，解為

$$r=1,\ s=-1 \qquad \text{和} \qquad r=-1,\ s=1,$$

即 $r+s\sqrt{3}=\pm(1-\sqrt{3})$。的確 $(1-\sqrt{3})^2=1-2\sqrt{3}+3=4-2\sqrt{3}$。

第 (ii) 部分

展開得 $(p+q\mathrm{i})^2=(p^2-q^2)+2pq\,\mathrm{i}$。由於 p 和 q 是實數，我們可以比較實部（real part）與虛部（imaginary part）：

$$p^2-q^2=3-2\sqrt{3},\qquad pq=1-\sqrt{3}.$$

第二條方程顯示 $p\neq 0$，所以 $q=(1-\sqrt{3})/p$，而 $q^2=(1-\sqrt{3})^2/p^2=(4-2\sqrt{3})/p^2$。代入第一條方程並乘以 p^2，得

$$p^4-(3-2\sqrt{3})\,p^2-(4-2\sqrt{3})=0.$$

> **想一想** 這是一條以 p^2 為未知數的二次方程，係數看來相當麻煩。有沒有快捷的方法把它因式分解？

p^2 的兩個根之和必為 $3-2\sqrt{3}$，之積必為 $-(4-2\sqrt{3})$。試試 -1：另一個根便會是 $4-2\sqrt{3}$，而的確 $-1+(4-2\sqrt{3})=3-2\sqrt{3}$。所以

$$(p^2+1)(p^2-(4-2\sqrt{3}))=0.$$

由於 p 是實數，$p^2\neq -1$，所以由第 (i) 部分得 $p^2=4-2\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1)^2$。因此 $p=\pm(\sqrt{3}-1)$，而 $q=(1-\sqrt{3})/p=\mp 1$。解為

$$p=\sqrt{3}-1,\ q=-1\qquad 和\qquad p=1-\sqrt{3},\ q=1.$$

換句話說，$(3-2\sqrt{3})+2(1-\sqrt{3})\mathrm{i}$ 的平方根是 $\pm((\sqrt{3}-1)-\mathrm{i})$。驗算一下：$((\sqrt{3}-1)-\mathrm{i})^2=(4-2\sqrt{3})-1-2(\sqrt{3}-1)\mathrm{i}$，正是所求的數。

第 (iii) 部分

由二次公式（quadratic formula）（它對複數係數同樣成立，因為配方法在 $\mathbb{C}$ 上一樣行得通），

$$z=\frac{2\pm\sqrt{4-4(1+\mathrm{i})(2\sqrt{3}-2)}}{2(1+\mathrm{i})}=\frac{1\pm\sqrt{1-(1+\mathrm{i})(2\sqrt{3}-2)}}{1+\mathrm{i}},$$

其中 $\pm\sqrt{\ }$ 代表兩個複數平方根。根號內的量是

$$1-(2\sqrt{3}-2)-(2\sqrt{3}-2)\mathrm{i}=(3-2\sqrt{3})+2(1-\sqrt{3})\mathrm{i},$$

這正正是第 (ii) 部分的那個數。它的平方根是 $\pm((\sqrt{3}-1)-\mathrm{i})$，所以

$$z=\frac{1\pm((\sqrt{3}-1)-\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}},\quad 由此得\quad z_1=\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}},\qquad z_2=\frac{(2-\sqrt{3})+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}.$$

把分子和分母同乘以 $1-\mathrm{i}$（使分母變成 2）：

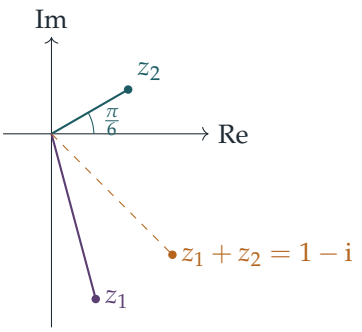
$$z_1 = \frac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2} = \frac{(\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}+1)\mathrm{i}}{2},$$
$$z_2 = \frac{((2-\sqrt{3})+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2} = \frac{(3-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)\mathrm{i}}{2}.$$

想一想 這算是「盡可能簡單的形式」嗎？兩個根當中，有沒有哪一個可以再整理一下？

第二個根可以因式分解：$(3-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)\mathrm{i} = (\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+\mathrm{i})$，而 $\sqrt{3}+\mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$。至於第一個根，$|z_1|^2 = \frac{1}{4}((4-2\sqrt{3})+(4+2\sqrt{3})) = 2$，而 $z_1 = \frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ 是 $2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$ 除以 $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ 的商。所以解為

$$z_1 = \tfrac{1}{2}((\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}+1)\mathrm{i}) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-5\pi\mathrm{i}/12},$$
$$z_2 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+\mathrm{i}) = (\sqrt{3}-1)\,\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/6}.$$

兩種形式（直角坐標形式 (Cartesian form) 或模—輻角形式 (modulus–argument form)）都是完全合格的最終答案。



驗算

- 根之和與根之積：對於 $az^2+bz+c=0$，我們需要 $z_1+z_2 = -b/a = 2/(1+\mathrm{i}) = 1-\mathrm{i}$ 以及 $z_1z_2 = c/a = (2\sqrt{3}-2)/(1+\mathrm{i}) = (\sqrt{3}-1)(1-\mathrm{i})$。由直角坐標形式，$z_1+z_2 = \frac{1}{2}(2-2\mathrm{i}) = 1-\mathrm{i}$；由極式（polar form），$z_1z_2 = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4} = (\sqrt{3}-1)(1-\mathrm{i})$。兩者都吻合。
- 數值上，$z_1 \approx 0.366 - 1.366\mathrm{i}$ 而 $z_2 \approx 0.634 + 0.366\mathrm{i}$，把任何一個代入 $(1+\mathrm{i})z^2 - 2z + 2\sqrt{3} - 2$，結果在機器精度之內都是 0。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分，忘記說明爲甚麼可以比較 $\sqrt{3}$ 的係數：這有賴於 r, s 是有理數而 $\sqrt{3}$ 是無理數（irrational number）。沒有這個條件，便有無窮多個實數解。
- 在第 (ii) 部分，保留了 $p^2 = -1$，或者把 p 和 q 的正負號配錯：$pq = 1 - \sqrt{3} < 0$ 迫使兩者異號。
- 在第 (iii) 部分，把整條公式除以 2 時出錯，或者讓 $1 + \mathrm{i}$ 留在分母而沒有把分母實數化。

STEP 之外

第 (i) 部分之所以行得通，是因為 1 和 $\sqrt{3}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上線性獨立（linearly independent），所以 $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{r + s\sqrt{3}\}$ 的表現就像有理數上的一個二維空間；第 (ii) 部分用的是同一個想法，只是換成 $\mathbb{R}$ 上的 1 和 i。這是域擴張（field extension）的起點，大學一年級的代數課程會由此一路發展到伽羅瓦理論（Galois theory）。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣）涵蓋了這些內容，而 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（複分析的幾何視角）則為複數平方根提供了一個優美的幾何觀點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。