詳細解答

STEP I 1996，第 4 題

純數學 • 以配方法積分

> **STEP I 1996，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q4

關鍵思路

每當分母是二次式，就先配方（complete the square）：$x^2+2ax+1=(x+a)^2+(1-a^2)$。一切取決於 $1-a^2$ 的正負。若它是正數，分母是「平方和」，積分會得出反正切（inverse tangent）；若它是負數，分母是平方差（difference of squares），可拆成部分分式（partial fractions），積分會得出對數。之後真正要花工夫的，是把答案整理成題目所給的形式。

解答

以下一律以 I 表示在 $[0,1]$ 上的積分。配方得

$$x^2+2ax+1=(x+a)^2+1-a^2.$$

$|a|<1$ 的情況

設 $b=\sqrt{1-a^2}>0$。利用 $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+b^2}=\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{u}{b}$，其中 $u=x+a$，得

$$I=\frac{1}{b}\left[\tan^{-1}\frac{x+a}{b}\right]_0^1=\frac{1}{b}(\alpha-\beta),\qquad \text{其中 } \alpha=\tan^{-1}\frac{1+a}{b},\quad \beta=\tan^{-1}\frac{a}{b}.$$

（分母在 $[0,1]$ 上永不為零，因為它至少是 $b^2>0$，所以這個積分沒有問題。）我們需要的是單獨一個反正切，所以取 $\alpha-\beta$ 的正切：

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\dfrac{1+a}{b}-\dfrac{a}{b}}{1+\dfrac{(1+a)a}{b^2}}=\frac{b}{b^2+a+a^2}=\frac{b}{1+a},$$

這裏用了 $b^2 + a^2 = 1$。最後

$$\frac{b}{1+a} = \frac{\sqrt{(1-a)(1+a)}}{1+a} = \sqrt{\frac{1-a}{1+a}},$$

這一步成立，是因為 $1 + a > 0$。

> ? **想一想** 由 $\tan(\alpha - \beta) = t$ 真的可以得出 $\alpha - \beta = \tan^{-1} t$ 嗎？

只有當 $\alpha - \beta$ 位於 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，即 $\tan^{-1}$ 的值域（range）之內才可以，所以我們必須驗證這一點。由於 $(1+a)/b > 0$，有 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，而 $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$。此外 $\alpha > \beta$，因為 $\tan^{-1}$ 是遞增函數，而 $(1+a)/b > a/b$。所以 $0 < \alpha - \beta < \pi$。在這個區間上，tan 只在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上取正值，而我們已求得 $\tan(\alpha - \beta) > 0$；因此 $0 < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$，於是

$$I = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \qquad (|a| < 1),$$

正是所求。

（一個更巧妙的看法：設 $a = \cos\varphi$，$0 < \varphi < \pi$，可得 $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$ 和 $\beta = \frac{\pi}{2} - \varphi$，所以 $\alpha - \beta = \frac{\varphi}{2}$，而確實有 $\sqrt{(1-\cos\varphi)/(1+\cos\varphi)} = \tan\frac{\varphi}{2}$。）

$|a| > 1$ 的情況

設 $c = \sqrt{a^2 - 1} > 0$。這時分母是兩個平方之差：

$$x^2 + 2ax + 1 = (x+a)^2 - c^2 = (x + a - c)(x + a + c),$$

拆成部分分式得

$$\frac{1}{(x+a-c)(x+a+c)} = \frac{1}{2c}\left(\frac{1}{x+a-c} - \frac{1}{x+a+c}\right).$$

這個二次式的根是 $-a \pm c$，兩根之積為 1，兩根之和為 $-2a$。

先假設 $a > 1$。這時 $a > c$（因為 $a^2 > a^2 - 1$），所以當 $x \geq 0$ 時，$x + a - c$ 和 $x + a + c$ 都是正數。因此

$$I = \frac{1}{2c}\left[\ln\frac{x+a-c}{x+a+c}\right]_0^1 = \frac{1}{2c}\left(\ln\frac{1+a-c}{1+a+c} - \ln\frac{a-c}{a+c}\right).$$

利用 $(a-c)(a+c) = a^2 - c^2 = 1$，兩個分數都可以化簡：

- $(1+a-c)(a+c) = (a+c) + (a-c)(a+c) = 1 + a + c$，所以 $\dfrac{1+a-c}{1+a+c} = \dfrac{1}{a+c}$；
- $a - c = \dfrac{1}{a+c}$，所以 $\dfrac{a-c}{a+c} = \dfrac{1}{(a+c)^2}$。

於是

$$I = \frac{1}{2c}\big(-\ln(a+c) + 2\ln(a+c)\big) = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}\ln\big(a+\sqrt{a^2-1}\big),$$

這就是題目所述的結果，因為這裏 $a+\sqrt{a^2-1} > 0$，所以它等於自己的絕對值（modulus）。

那麼 $a < -1$ 又如何？這時兩根 $-a \pm c = |a| \pm c$ 都是正數，而且乘積為 1，所以較小的一個根 $|a| - \sqrt{a^2-1}$ 嚴格介乎 0 與 1 之間。被積函數（integrand）在 $[0,1]$ 之內有一個單極點（simple pole），在根 r 附近的表現就像某個常數乘以 $1/(x-r)$。所以這個積分並不收斂（converge），嚴格來說，公式只對 $a > 1$ 成立。（用 $\ln|\cdot|$ 重做同樣的部分分式計算，可知公式給出的是柯西主值（Cauchy principal value），即在 r 兩旁對稱地挖去一小段之後，積分的極限。這就解釋了題目中為何有絕對值符號。）

驗算

- $a = 0$：積分是 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$，而公式給出 $\tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}$。
- $a = 2$：用辛普森法則（Simpson's rule）算得 0.380173，與 $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$ 吻合。
- 當 $a \to 1$ 時，兩個分支都趨向 $\frac{1}{2} = \int_0^1 (1+x)^{-2}\,\mathrm{d}x$。對第二個分支，當 c 很小時 $\ln(a+c) \approx c$；對第一個分支，$\tan^{-1}t \approx t$，而 $\sqrt{(1-a)/(1+a)}/\sqrt{1-a^2} = 1/(1+a)$。

常見錯誤

- 寫下 $\tan^{-1}A - \tan^{-1}B = \tan^{-1}\frac{A-B}{1+AB}$，卻沒有驗證兩者之差位於 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 之內。
- 忘記了當 $a < -1$ 時，分母會在 $[0,1]$ 之內變為零。

STEP 之外

這兩個答案其實是 a 的同一個函數。在第一個答案中設 $a = \cos\varphi$，在第二個答案中設 $a = \cosh t$，分別得到 $\varphi/(2\sin\varphi)$ 和 $t/(2\sinh t)$；借助複數（$\cosh t = \cos(\mathrm{i}t)$），其中一個正是另一個的解析延拓（analytic continuation）。$a < -1$ 時積分發散（divergence），再靠主值來補救，這讓我們初次領略複分析（complex analysis）如何處理積分路徑上的極點。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）是領會這一點的絕佳去處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。