詳細解答

STEP I 1996，第 2 題

純數學 • Beta 積分

STEP I 1996，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/96-s1-q2

關鍵思路

(i) 和 (ii) 的被積函數（integrand）其實是同一個函數的兩種寫法：$\alpha x + (1-x) = 1 + (\alpha - 1)x$。因此，同一個積分用兩種方法計算，便得到同一個關於 α 的多項式（polynomial）的兩種描述。第 (i) 部分給出閉合形式（closed form），第 (ii) 部分把各項係數寫成積分，餘下的工作只需比較係數（comparing coefficients）便可完成，完全不需要用分部積分法（integration by parts）。

解答

第 (i) 部分

作代換（substitution）$u = 1 + (\alpha - 1)x$，則 $\mathrm{d}u = (\alpha - 1)\,\mathrm{d}x$；當 $x = 0$ 時 $u = 1$，當 $x = 1$ 時 $u = \alpha$。由於 $\alpha \neq 1$，我們可以除以 $\alpha - 1$：

$$\int_0^1 (1 + (\alpha - 1)x)^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha - 1}\int_1^\alpha u^n \,\mathrm{d}u = \frac{1}{\alpha - 1}\left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_1^\alpha = \frac{\alpha^{n+1} - 1}{(n+1)(\alpha - 1)},$$

這正是所求。（即使 $\alpha < 1$ 或 $\alpha < 0$，這個代換仍然成立：它是線性的，而且無論上下限的次序如何，公式 $\int_1^\alpha u^n \,\mathrm{d}u$ 都成立。換個做法，直接對 $(1 + (\alpha - 1)x)^{n+1}/((n+1)(\alpha - 1))$ 求導亦可。）

第 (ii) 部分

把 αx 和 $1 - x$ 視為兩項，用二項式定理（binomial theorem）展開被積函數：

$$(\alpha x + (1-x))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\alpha x)^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

這是有限和，所以可以逐項積分；對 x 積分時，α 是常數：

$$\int_0^1 (\alpha x + (1-x))^n \,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \left[\binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} \,\mathrm{d}x \right].$$

每個方括號內都是一個與 α 無關的數，所以這是一個關於 α 的多項式，次數至多為 n，而對於 $0 \le k \le n$，α^k 的係數是 $\binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} \,\mathrm{d}x$，這正是所求。

第 (iii) 部分

把 (ii) 中的多項式記作 $P(\alpha)$。由於 $\alpha x + (1-x) = 1 + (\alpha - 1)x$，第 (i) 部分表明，對每一個 $\alpha \neq 1$，

$$P(\alpha) = \frac{\alpha^{n+1} - 1}{(n+1)(\alpha - 1)} = \frac{1}{n+1}(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n),$$

這裏用了等比級數（geometric series）的因式分解 $\alpha^{n+1} - 1 = (\alpha - 1)(1 + \alpha + \cdots + \alpha^n)$。

想一想 我們只知道這兩個多項式在 $\alpha \neq 1$ 時相等。為甚麼可以比較係數？

兩邊之差是一個次數至多為 n 的多項式，而且在每一個 $\alpha \neq 1$ 處都等於零，所以它有無限多個根。一個次數至多為 n 的非零多項式最多只有 n 個根，因此這個差是零多項式：每一項係數都相同。（另一個說法是：兩邊都是連續的，所以在 $\alpha = 1$ 處也相等。）

在右邊，每個 α^k（$0 \le k \le n$）的係數都等於 $\frac{1}{n+1}$。與 (ii) 比較，得

$$\binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1},$$

因此

$$\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}} = \frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)\,n!} = \frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)!},$$

這就是所求的結果。

驗算

- $k = 0$：$\int_0^1 (1-x)^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$，而公式給出 $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$。
- $n = 2$，$k = 1$：$\int_0^1 (x - x^2) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{1!\,1!}{3!}$。
- 數值上，$\int_0^1 x^2 (1-x)^3 \,\mathrm{d}x \approx 0.016667 = \frac{1}{60} = \frac{2!\,3!}{6!}$；我們隨機選取 α 和 n，用辛普森法則（Simpson's rule）驗證了 (i)，並對所有 $0 \le k \le n \le 12$ 精確地驗證了 (iii)。
- 一個賞心悅目的推論：P 的各項係數全部相等，所以 $\int_0^1 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \,\mathrm{d}x$ 與 k 無關。

常見錯誤

- 比較係數時沒有指出 (i) 只在 $\alpha \neq 1$ 的情況下得證；只要補上一句關於多項式（或連續性）的說明，便可填補這個漏洞。
- 在 (ii) 中把 $(1+(\alpha-1)x)^n$ 按 $(\alpha-1)$ 的冪展開：這樣得到的多項式是對的，卻不是按 α 的冪排列。應改為展開 $\big(\alpha x+(1-x)\big)^n$。

STEP 之外

積分 $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x$ 就是歐拉（Euler）的貝塔函數（beta function）$B(a,b)$，而本題的結果正是 $B(a,b)=\Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$ 在整數情況下的特例。在概率論中，它的意思是：若在 $[0,1]$ 上均勻地選取 p，然後擲 n 枚出現正面的概率為 p 的硬幣，則正面的數目由 0 到 n 每一個都同樣可能出現，概率各為 $\frac{1}{n+1}$（這正是「所有係數相等」的含義），而這亦是貝葉斯（Bayes）本人那篇著名論文的出發點。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）詳細闡述了這背後的貝塔分佈和伽瑪分佈（beta and gamma distributions）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。