詳細解答

# STEP I 1996，第 14 題

概率與統計 • 游程與條件概率

**STEP I 1996，第 14 題**

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/96-s1-q14

## 關鍵思路

按當前這一段連續結果如何結束來取條件（conditioning）。硬幣一旦換面，之前發生的一切就再無關係：舊的一段連續結果已被打斷，而新的一段長度為一。因此，擲出正面之後，只要一出現反面，遊戲便隨即「重新開始」，所處的狀態與第一次投擲就擲出反面時完全相同；反之亦然。由此得到兩條含兩個未知數的線性方程。

## 解答

記 $x = \mathrm{P}(A \mid H)$ 及 $y = \mathrm{P}(A \mid T)$。各次投擲自始至終互相獨立（independent）。我們取 $r, s \geq 1$。

### $\mathrm{P}(A \mid H)$ 的方程

假設第一次投擲得正面。此時我們有一段長度為一的連續正面，而連續反面尚未開始。考慮接下來的 $r-1$ 次投擲（第 2 至第 $r$ 次）。

- 若這些投擲全為正面，其概率為 $p^{r-1}$，則在第 $r$ 次投擲時完成一段 $r$ 個連續正面。期間完全沒有出現過反面，所以必定沒有 $s$ 個連續反面搶先出現，故 $A$ 發生。
- 否則，其概率為 $1 - p^{r-1}$，在連續正面的長度達到 $r$ 之前，第 $2, \ldots, r$ 次投擲之中出現了反面。在第一個這樣的反面出現時，連續正面未達到 $r$ 便被打斷，而此前並無反面出現，所以 $s$ 個連續反面亦未曾出現。此刻我們手上恰好有一段長度為一的連續反面，而之前的一切都不可能對日後任何一段連續結果有所貢獻。

? **想一想** 為甚麼從該個反面起計，$A$ 發生的概率恰好是 $\mathrm{P}(A \mid T)$？

第一次投擲得反面之後，情況是：有一段長度為一的連續反面，沒有進行中的連續正面，而且往後的投擲與過去獨立。這正正是上述第二種情形中第一個反面出現時的情況。由於往後的投擲與之前的投擲獨立，而兩種連續結果中哪一種先出現，只取決於當前這一段連續結果和往後的投擲，所以從該刻起 $A$ 的條件概率（conditional probability）為 $y$。因此，根據全概率公式（law of total probability），

$$\mathrm{P}(A \mid H) = p^{r-1} + \left(1 - p^{r-1}\right)\mathrm{P}(A \mid T),$$

所以 $\alpha = r - 1$。

### $\mathrm{P}(A \mid T)$ 的方程

假設第一次投擲得反面。考慮第 2 至第 $s$ 次投擲。

- 若全為反面（概率為 $q^{s-1}$），則在任何正面出現之前已完成一段 $s$ 個連續反面，故 $A$ 不發生。
- 否則（概率為 $1 - q^{s-1}$），在反面連續出現 $s$ 次之前出現了正面。在該個正面出現時，我們有一段長度為一的連續正面，而反面方面並無任何進行中的連續結果，這正是第一次投擲得正面之後的情況。所以從該處起，$A$ 發生的概率為 $x$。

因此

$$\mathrm{P}(A \mid T) = \left(1 - q^{s-1}\right)\mathrm{P}(A \mid H),$$

所以 $\beta = s - 1$。

（邊界情況同樣吻合。若 $r = 1$，第一條方程給出 $x = 1$，這是對的，因為單單一個正面已經是一段長度為 $r$ 的連續正面。若 $s = 1$，第二條方程給出 $y = 0$。）

### 求解

把第二條方程代入第一條：

$$x = p^{r-1} + \left(1 - p^{r-1}\right)\left(1 - q^{s-1}\right)x.$$

現在

$$1 - \left(1 - p^{r-1}\right)\left(1 - q^{s-1}\right) = p^{r-1} + q^{s-1} - p^{r-1}q^{s-1},$$

此式為正數（當 $0 < p < 1$ 時，它至少為 $p^{r-1} > 0$，因為 $q^{s-1}(1 - p^{r-1}) \geq 0$）。所以我們可以除以它。記 $D = p^{r-1} + q^{s-1} - p^{r-1}q^{s-1}$，則

$$\mathrm{P}(A \mid H) = \frac{p^{r-1}}{D}, \qquad \mathrm{P}(A \mid T) = \frac{p^{r-1}\left(1 - q^{s-1}\right)}{D}.$$

最後，以 $\mathrm{P}(H) = p$ 及 $\mathrm{P}(T) = q$ 應用全概率公式：

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) &= p\,\mathrm{P}(A \mid H) + q\,\mathrm{P}(A \mid T)\\ &= \frac{p^{r-1}\left(p + q - q^s\right)}{D}\\ &= \frac{p^{r-1}\left(1 - q^s\right)}{p^{r-1} + q^{s-1} - p^{r-1}q^{s-1}},\end{aligned}$$

其中用到 $p + q = 1$。

## 驗算

- 對稱性：對於公平硬幣且 $r = s$，答案應為 $\frac{1}{2}$。取 $p = q = \frac{1}{2}$ 及 $r = s = n$，分子為 $2^{1-n}(1 - 2^{-n})$，分母為 $2^{2-n} - 2^{2-2n} = 2 \cdot 2^{1-n}(1 - 2^{-n})$，得 $\frac{1}{2}$。
- 簡單情況：$r = 1$ 時得 $\mathrm{P}(A) = 1 - q^s$，即首 $s$ 次投擲並非全為反面的概率，這是正確的。
- 當 $p = \frac{1}{2}$、$r = 3$、$s = 2$ 時，公式給出 $\mathrm{P}(A \mid H) = \frac{2}{5}$、$\mathrm{P}(A \mid T) = \frac{1}{5}$ 及 $\mathrm{P}(A) = \frac{3}{10}$。我們已透過精確求解整條馬可夫鏈（Markov chain）確認這個結果，而模擬 200 000 局遊戲所得的結果為 0.298。

## 常見錯誤

- 用了 $p^r$ 而非 $p^{r-1}$：第一個正面已經給定，所以只需再多 $r - 1$ 個。
- 忘記 $\mathrm{P}(A)$ 最後還須以 $p$ 和 $q$ 加權。單是條件概率並不是答案。

## STEP 之外

這個論證是對馬可夫鏈所作的*首步分析*（first-step analysis）：狀態是「當前的面和連續長度」，而重新開始這一性質就是馬可夫性質（Markov property）。同一方法可求出任何正反面圖樣的吸收概率（absorption probability）和期望等待時間（expected waiting time），並進一步引向 Penney 遊戲（Penney's game），當中某些圖樣竟然出人意表地勝過另一些圖樣。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）以合適的程度講解馬可夫鏈和首步分析。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。