詳細解答

STEP I 1996，第 11 題

力學 • 拋體運動

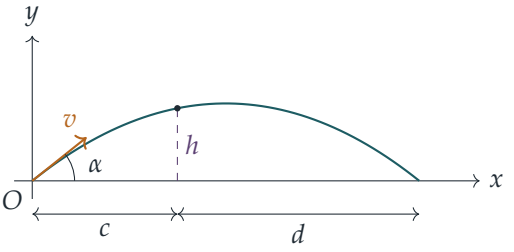
> **STEP I 1996，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q11

關鍵思路

拋體（projectile）的路徑是一條拋物線（parabola），而我們知道它與地面相交的兩個位置：$x = 0$ 和 $x = c + d$。二次函數（quadratic）一旦知道了根（roots），就只差一個常數未定，所以軌跡（trajectory）必定是 $y = kx(c + d - x)$，其中 k 為某個常數。點 (c, h) 決定了 k 的值，再與標準的軌跡方程比較，便可把 k 化為 $\tan\alpha$，繼而化為 v^2。

解答

我們把質點（particle）視為只受重力作用而自由運動的點質量（point mass），不計空氣阻力（air resistance）；取 O 為原點，x 軸沿運動方向水平，y 軸鉛垂向上。設射程（range）為 $R = c + d$，並記 $T = \tan\alpha$。



拋射角

初速度的分量為 $v\cos\alpha$ 和 $v\sin\alpha$，因此經過時間 t 後的位置是 $x = vt\cos\alpha$，$y = vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$。利用 $t = x/(v\cos\alpha)$ 消去時間，得軌跡方程

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha}.$$

質點在 $x = R$ 處着地，所以該處 $y = 0$。由於 $R \neq 0$，我們可以除以 R：

$$\frac{g}{2v^2\cos^2\alpha} = \frac{\tan\alpha}{R}. \qquad (*)$$

把這個結果代回軌跡方程，

$$y = Tx - \frac{Tx^2}{R} = \frac{Tx(R-x)}{R}.$$

想一想 為甚麼值得在使用點 (c,h) 之前，先把 $g/(2v^2\cos^2\alpha)$ 換掉？

因為 $(*)$ 把 v 完全消去，只剩下一條以 T 為唯一未知數的方程。從幾何角度看，我們已把拋物線寫成因式分解的形式，它的兩個根 0 和 R 一目了然。現在點 (c,h) 在路徑上，而 $R - c = d$，所以

$$h = \frac{Tcd}{c+d}, \qquad \text{即} \qquad \tan\alpha = \frac{h(c+d)}{cd},$$

這正是所要證明的結果。

拋射速率

把 $(*)$ 移項，並利用 $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$，

$$v^2 = \frac{gR}{2T\cos^2\alpha} = \frac{gR(1+T^2)}{2T} = \frac{g}{2}\left(\frac{R}{T} + RT\right).$$

由第一個結果，$\dfrac{R}{T} = \dfrac{cd}{h}$ 及 $RT = \dfrac{(c+d)^2h}{cd}$。因此

$$v^2 = \frac{g}{2}\left(\frac{cd}{h} + \frac{(c+d)^2h}{cd}\right),$$

全題至此完成。

驗算

- 根據算術—幾何平均不等式（AM–GM inequality），$\frac{R}{T} + RT \geq 2R$，所以 $v^2 \geq gR$，而等號恰好在 $T = 1$ 時成立。這就是大家熟悉的事實：在給定速率下，最大射程為 v^2/g，並在 45° 時達到。

- 如果點 (c,h) 是飛行路徑的最高點，則 $c=d$，且 $\tan\alpha = 2h/c$，這與標準結果吻合：最大高度等於射程的四分之一乘以 $\tan\alpha$。
- 數值上，取 $g=9.81$、$c=3$、$d=5$ 和 $h=2$，公式給出 $\tan\alpha = \frac{16}{15}$ 及 $v^2 \approx 78.64$。以細小的時間步長逐步模擬運動，質點在 $x=3$ 處經過高度 2.000，並在 $x=8.000$ 處着地。

常見錯誤

- 漏掉軌跡方程中的 $\cos^2\alpha$，或者把 $\sec^2\alpha$ 換成 $1+\tan\alpha$ 而不是 $1+\tan^2\alpha$。
- 試圖直接由「在 $x=c$ 處高度為 h」和「在 $x=c+d$ 處高度為 0」這兩條方程解出 v 和 α。這樣做是可行的，但代數運算比先用 $(*)$ 消去 v 繁重得多。

STEP 之外

把二次函數用它的根來表示，這個技巧是一個重要思想的小小例子：多項式由它的零點決定，只差一個常數倍，由此可引伸至插值（interpolation），以及複數（complex numbers）範圍內的因式定理（factor theorem）。在力學中，固定 v 而讓 α 變化，會得到一族拋物線，它們的包絡線（envelope）就是「安全拋物線」（parabola of safety），即拋體所能到達的所有點的邊界。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力學導論）以大學一年級的程度討論拋體運動及其延伸課題（包括空氣阻力）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。