詳細解答

STEP I 1996，第 10 題

力學 • 動量守恆

STEP I 1996，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/96-s1-q10

關鍵思路

這裏要用到兩個守恆關係：動量守恆（momentum is conserved；爆炸前動量為零），以及爆炸後的動能（kinetic energy）為 E。只要知道質量如何分配，這兩個關係合起來便能確定兩個速率，於是相對速率（relative speed）就成為質量分配方式的函數。要把它減至最小，歸根究底只需一個不等式，而由於 $m_1 + m_2$ 是固定的，算術–幾何平均不等式（AM–GM inequality）正是最自然的工具。

解答

我們把兩個部分看作質點（particles），假設爆炸過程中沒有質量損失，所以 $m_1 + m_2 = M$，並假設爆炸期間沒有外力（external forces）作用。



動量。 太空船起初靜止，所以爆炸前的總動量為零，爆炸後亦因此為零。兩個動量 $m_1\mathbf{v}_1$ 與 $m_2\mathbf{v}_2$ 必須互相抵消，所以兩個部分沿同一直線朝正好相反的方向運動，並且

$$m_1 v_1 = m_2 v_2 = p,$$

其中 $p > 0$ 是兩者動量的共同大小。由於兩個部分朝相反方向運動，它們的相對速率確實是 $v_1 + v_2$。

能量。 爆炸後的全部動能都來自爆炸，所以

$$E = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{p^2}{2m_1} + \frac{p^2}{2m_2} = \frac{p^2(m_1+m_2)}{2m_1m_2} = \frac{p^2M}{2m_1m_2}.$$

因此 $p^2 = \dfrac{2Em_1m_2}{M}$。

相對速率。 利用 $v_1 = p/m_1$ 和 $v_2 = p/m_2$，

$$v_1 + v_2 = p\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{pM}{m_1m_2},$$

所以

$$(v_1+v_2)^2 = \frac{p^2M^2}{m_1^2m_2^2} = \frac{2Em_1m_2}{M}\cdot\frac{M^2}{m_1^2m_2^2} = \frac{2EM}{m_1m_2}.$$

> ? **想一想** E 和 M 都是固定的。剩下唯一可以由我們自由改變的是甚麼？我們又希望它朝哪個方向變化？

可以改變的只有質量的分配方式；要使 v_1+v_2 盡量小，就要在 $m_1+m_2 = M$ 的條件下，使乘積 m_1m_2 盡量大。根據算術–幾何平均不等式（兩個質量皆為正數），

$$m_1m_2 \le \left(\frac{m_1+m_2}{2}\right)^2 = \frac{M^2}{4},$$

等號成立當且僅當 $m_1 = m_2 = \tfrac{1}{2}M$。（等價地，$m_1m_2 = \tfrac{1}{4}M^2 - \tfrac{1}{4}(m_1-m_2)^2$。）因此

$$(v_1+v_2)^2 = \frac{2EM}{m_1m_2} \ge \frac{2EM}{M^2/4} = \frac{8E}{M},$$

而由於速率是非負的，我們可以取平方根：

$$v_1 + v_2 \ge \left(\frac{8E}{M}\right)^{1/2}.$$

當太空船分裂成相等的兩半時，這個界便可達到，此時每一半的速率都是 $\sqrt{2E/M}$。所以相對速率的最小可能值是 $(8E/M)^{1/2}$，正如題目所求。

驗算

- 相等的兩半：每一半的動能為 $\tfrac{1}{2}E = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}Mv^2$，所以 $v = \sqrt{2E/M}$，而 $2v = \sqrt{8E/M}$，與所得的界吻合。
- 極端的分配：當 $m_1 \to 0$ 時，$m_1m_2 \to 0$，相對速率趨向無窮大。這是合理的，因為一塊極小的碎片若帶走一部分能量，就必須運動得非常快。

- 單位：E/M 的單位是 $\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-2}$，所以它的平方根是速率。
- 數值上，取 $M = 7$ 和 $E = 3$，讓 m_1 在 $(0,7)$ 上逐一取值，所得的最小相對速率為 $1.85164\ldots$，在 $m_1 = 3.5$ 時出現，與 $\sqrt{24/7} = 1.85164\ldots$ 相符。

常見錯誤

- 忘記說明兩個部分為何朝相反方向運動；正是這一點令相對速率是 $v_1 + v_2$ 而不是 $|v_1 - v_2|$。
- 對 m_1 求最小值時沒有用到 $m_1 + m_2 = M$；正是這個約束條件令問題變成一維。
- 只證明了 $(8E/M)^{1/2}$ 是下界（lower bound），卻沒有指出這個下界確實可以達到（當 $m_1 = m_2$ 時）。

STEP 之外

這是在質心參考系（centre-of-mass frame）中處理問題的最簡單例子：在這個參考系中，二體分裂所產生的動量總是大小相等、方向相反，而動能為 $p^2/(2\mu)$，其中 $\mu = m_1 m_2/M$ 是約化質量（reduced mass）。這裏 $(v_1 + v_2)^2 = 2E/\mu$，而約化質量在兩個質量相等時最大。核衰變和二體軌道的背後也是同一個想法；Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對此有仔細的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。