詳細解答

STEP I 1996，第 1 題

純數學 • 圓柱的最優化

> **STEP I 1996，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q1

關鍵思路

描述這個罐子需要兩個量：半徑 r 和高 h。體積的約束條件讓我們可以消去其中一個，於是 S 變成只含 r 的函數，用普通的微分法（differentiation）就可以求出它的最小值。最優的罐子原來有一個非常整齊的形狀。一旦看出這個形狀，兩條關於球體的問題都歸結為觀察一個通過軸的截面（cross-section）。

解答

求表面積的最小值

設罐子的半徑為 $r > 0$，高為 $h > 0$。則

$$V = \pi r^2 h, \qquad S = 2\pi r^2 + 2\pi r h,$$

其中 $2\pi r^2$ 來自兩個底面，$2\pi rh$ 來自曲面側面。對於固定的 V，我們有 $h = V/(\pi r^2)$，所以 $2\pi rh = 2V/r$，而

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}, \qquad r > 0.$$

求導得

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{2(2\pi r^3 - V)}{r^2}.$$

當 $r^3 < V/(2\pi)$ 時它是負的，當 $r^3 > V/(2\pi)$ 時它是正的。所以 S 先遞減後遞增，它在 $r > 0$ 上的最小值出現在

$$r^3 = \frac{V}{2\pi}.$$

這是全局最小值（global minimum），而不僅是局部最小值，因為它是唯一的駐點（stationary point），而且導數在該處由 $-$ 變為 $+$。（從公式也可以看出這一點：當 $r \to 0^+$

和當 $r \to \infty$ 時，都有 $S \to \infty$。）

在這個半徑下 $V = 2\pi r^3$，所以

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = 2r.$$

最好的罐子，高度與闊度恰好相等。這時 $2V/r = 4\pi r^2$，所以

$$\begin{aligned} S &= 2\pi r^2 + 4\pi r^2 = 6\pi r^2 = 6\pi \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{2/3} \\ &= 3 \cdot 2\pi \cdot (2\pi)^{-2/3} V^{2/3} = 3\,(2\pi)^{1/3} V^{2/3} = 3\,(2\pi V^2)^{1/3}, \end{aligned}$$

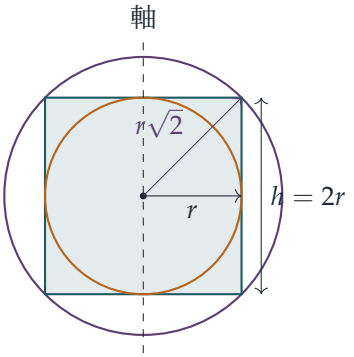
這就是所要求的最小值。

想一想 為甚麼用 r 而不用 h 來計算？

兩個變量都可行。不過消去 h 比較容易，因為 h 在兩條公式中都只以一次項出現，所以代入 $h = V/(\pi r^2)$ 便得到一個簡單的 r 的函數。消去 r 則會引入 $\sqrt{V/(\pi h)}$，代數運算會變得較為繁複。

罐內最大的球

從現在起，罐子滿足 $h = 2r$。用一個通過其軸的平面把它切開：截面是一個 $2r \times 2r$ 的正方形。



罐內任何一個球的半徑都滿足 $\rho \le r$。要看出這一點，可把球投影到底面所在的平面上：得到一個半徑為 ρ 的圓盤，它位於半徑為 r 的底面圓盤之內。另外 $2\rho \le h = 2r$，這給出相同的上界。以罐子中心為球心、半徑為 r 的球（截面圖中的琥珀色圓）與兩個底面及曲面側面都相切，所以它放得進去。利用 $r^3 = V/(2\pi)$，最大的球的體積因此是

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{4}{3}\pi \cdot \frac{V}{2\pi} = \tfrac{2}{3}V,$$

正如所求。

包含罐子的最小的球

在頂面的邊緣上取一點，再在底面的邊緣上取與它沿直徑方向相對的一點。這兩點是正方形截面的一對對角頂點，所以它們之間的距離是

$$\sqrt{(2r)^2 + h^2} = \sqrt{8r^2} = 2\sqrt{2}\,r.$$

任何包含罐子的球都包含這兩點，所以它的直徑至少是 $2\sqrt{2}\,r$，半徑至少是 $\sqrt{2}\,r$。

> **想一想** 我們怎樣知道半徑為 $\sqrt{2}\,r$ 的球真的夠大？

把球心放在罐子的中心 O。罐子上任何一點與軸的距離為 $\rho \le r$，並位於 O 之上或之下高度 z 處，其中 $|z| \le r$。因此它與 O 的距離是 $\sqrt{\rho^2 + z^2} \le \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2}\,r$。所以整個罐子都位於這個球之內（梅紫色的圓通過正方形的全部四個頂點）。

因此，能容納罐子的最小的球半徑為 $\sqrt{2}\,r$，體積為

$$\tfrac{4}{3}\pi\left(\sqrt{2}\,r\right)^3 = \tfrac{4}{3}\pi \cdot 2\sqrt{2}\,r^3 = \tfrac{8\sqrt{2}}{3}\pi \cdot \frac{V}{2\pi} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\,V.$$

驗算

- 取 $V = 1$，在一個細密的 r 值網格上以窮舉方式求 $2\pi r^2 + 2/r$ 的最小值，得 $S \approx 5.5358$，與 $3(2\pi)^{1/3} \approx 5.5358$ 吻合。
- 兩個球的體積之比應為 $(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$，即半徑之比的立方。果然 $\frac{4\sqrt{2}}{3}V \big/ \frac{2}{3}V = 2\sqrt{2}$。
- 大小次序合理：$\frac{2}{3}V < V < \frac{4\sqrt{2}}{3}V \approx 1.886\,V$，所以內球比罐子小，外球比罐子大。

常見錯誤

- 漏掉一個或兩個底面，寫成 $S = \pi r^2 + 2\pi rh$ 或 $S = 2\pi rh$。這樣會得出不同的最優形狀。
- 只證明 $\mathrm{d}S/\mathrm{d}r = 0$，卻沒有說明為甚麼該駐點是最小值。
- 把外球的半徑取為 r 或 h，而不是罐子空間對角線的一半。

STEP 之外

這是約束優化（constrained optimisation）：在 $V(r,h)$ 固定的條件下，求 $S(r,h)$ 的最小值。在大學你會學到拉格朗日乘數（Lagrange multipliers），它不必消去變量就能處理這類問題。條件 $\nabla S = \lambda \nabla V$ 幾乎立刻就給出 $h = 2r$。這兩個球也說明了凸體（convex

body）的「內切」球（inscribed ball）和「外接」球（circumscribed ball），它們是凸幾何（convex geometry）的核心概念。想做更多同類風格的題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等數學問題集）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。