詳細解答

STEP III 1995，第 9 題

力學 • 複擺

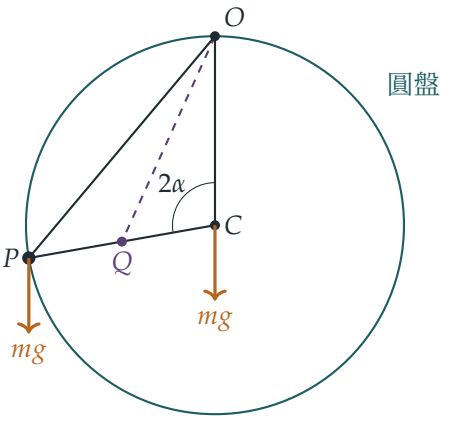
> **STEP III 1995，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q9

關鍵思路

圓盤與質點的質量相同，所以整個系統的質心（centre of mass）就是 CP 的中點 Q。差不多所有結論都由此而來：在穩定平衡（stable equilibrium）時，Q 位於 O 的正下方；而第 (iii) 部分的能量方程只需要 Q 的高度。餘下的工作，就是等腰三角形 OCP 的幾何，以及一個標準的轉動慣量（moment of inertia）積分。

解答

我們把圓盤視為剛性薄片（rigid lamina），把 P 視為固定在其邊緣上的質點（particle）；轉軸是光滑的，所以機械能守恆。全題中 $OC = CP = r$，且 $\angle OCP = 2\alpha$。



第 (i) 部分

由於圓盤（質心為 C）與質點（位於 P）的質量同為 m，系統的質心就是 CP 的中點 Q。作用於系統的力只有重力和轉軸上的反作用力，所以系統處於平衡，當且僅當 Q 與 O 在同一鉛垂線上；而當 Q 在 O 的下方時，平衡是穩定的（此時任何位移都會令 Q 升高，使勢能增加）。因此在穩定平衡時 OQ 是鉛垂的，而 β 就是角 $\angle COQ$。

在圓盤所在的平面上取坐標軸，以 C 為原點，並令 O 位於 $(r, 0)$；於是 $P = r(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$，$Q = \frac{r}{2}(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$。因此

$$\overrightarrow{OC} = (-r,\, 0), \qquad \overrightarrow{OQ} = \tfrac{r}{2}(-(2 - \cos 2\alpha),\, \sin 2\alpha).$$

由於 $2 - \cos 2\alpha > 0$，向量 $\overrightarrow{OQ}$ 沿 $\overrightarrow{OC}$ 方向的分量為正數 $\frac{r}{2}(2 - \cos 2\alpha)$，而與之垂直的分量為 $\frac{r}{2}\sin 2\alpha$，所以 β 是銳角，且

$$\tan\beta = \frac{\frac{r}{2}\sin 2\alpha}{\frac{r}{2}(2 - \cos 2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{2 - \cos 2\alpha},$$

這正是所要證明的結果。

第 (ii) 部分

我們把 $\rho x / r$ 理解為每單位面積的質量。半徑介乎 x 與 $x + \mathrm{d}x$ 之間的圓環，面積為 $2\pi x\,\mathrm{d}x$，所以

$$m = \int_0^r \frac{\rho x}{r}\, 2\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi\rho r^2}{3}.$$

該圓環上每一點與通過 C 且垂直於圓盤的軸的距離都是 x，所以對該軸的轉動慣量為

$$I_C = \int_0^r \frac{\rho x}{r}\, 2\pi x \cdot x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi\rho r^4}{5} = \frac{3}{5}mr^2,$$

其中用了 $2\pi\rho r^2 = 3m$。通過 O 的軸與這條軸平行（兩者都垂直於圓盤所在的鉛垂平面），相距 $OC = r$，所以由平行軸定理（parallel axis theorem）得

$$I_O = \frac{3}{5}mr^2 + mr^2 = \frac{8}{5}mr^2.$$

第 (iii) 部分

系統的轉動慣量。三角形 OCP 是等腰三角形，頂角為 2α，所以弦長 $OP = 2r\sin\alpha$。質點的貢獻是 $m(2r\sin\alpha)^2$，於是

$$I = \frac{8}{5}mr^2 + 4mr^2\sin^2\alpha = \frac{4}{5}mr^2\,(2 + 5\sin^2\alpha).$$

質心下降的高度。釋放時 OQ 是水平的，所以 Q 與 O 同高。在最終位置，P 在 O 的正下方，所以 OP 是鉛垂的，而任何一點在 O 以下的深度，就是它沿 OP 方向與 O 的距離。

- P 的深度為 $OP = 2r\sin\alpha$。
- 三角形 OCP 的底角為 $\frac{1}{2}(\pi - 2\alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha$，所以 $\angle COP = \frac{\pi}{2} - \alpha$，而 C 的深度為 $r\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = r\sin\alpha$。

Q 是 CP 的中點，所以它的深度是兩者的平均值，即 $\frac{3}{2}r\sin\alpha$。因此系統（總質量為 $2m$）損失的勢能為 $2mg \cdot \frac{3}{2}r\sin\alpha = 3mgr\sin\alpha$。

> **想一想** 系統真的會到達 P 在 O 下方的那個位置嗎？

系統在 Q 與 O 同高時由靜止釋放，其後便像複擺（compound pendulum）一樣，在 OQ 水平的兩個位置之間擺動，並經過 Q 低於 O 所在水平的每一個位置。在最終位置，Q 的深度為 $\frac{3}{2}r\sin\alpha > 0$，所以系統確實會到達該位置（而「$C$ 起初比 P 低」這個條件，只是決定了擺動的方向）。

能量。由靜止開始，設角速率（angular speed）為 ω，則

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 = 3mgr\sin\alpha \quad\Longrightarrow\quad \omega^2 = \frac{6gr\sin\alpha}{\frac{4}{5}r^2(2+5\sin^2\alpha)} = \frac{15g\sin\alpha}{2r(2+5\sin^2\alpha)}.$$

C 沿着以 O 為圓心、半徑為 $OC = r$ 的圓運動，所以 $v = r\omega$，且

$$v^2 = \frac{15gr\sin\alpha}{2(2+5\sin^2\alpha)},$$

這正是所要證明的結果。

極大值。設 $s = \sin\alpha$；由於 $0 < \alpha \le \pi/2$，故 $s \in (0,1]$。令 $f(s) = \dfrac{s}{2+5s^2}$，則

$$f'(s) = \frac{(2+5s^2) - 10s^2}{(2+5s^2)^2} = \frac{2-5s^2}{(2+5s^2)^2},$$

當 $s < \sqrt{2/5}$ 時為正，當 $s > \sqrt{2/5}$ 時為負。由於 $\sqrt{2/5} < 1$ 在容許的範圍之內，f 在該處取得極大值，$f = \dfrac{\sqrt{2/5}}{4} = \dfrac{\sqrt{10}}{20}$。因此

$$v^2_{\max} = \frac{15gr}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}}{20} = \frac{3\sqrt{10}}{8}gr \approx 1.19\,gr, \qquad \text{當 } \sin\alpha = \sqrt{2/5}.$$

驗算

- 若 $\alpha \to 0$，P 就落在 O 上，只有圓盤懸掛着，OC 是鉛垂的：果然 $\tan\beta \to 0$。若 $\alpha = \pi/2$，P 與 O 位於直徑的兩端，Q 在 OC 上，同樣有 $\beta = 0$。
- 取 $\alpha = \pi/2$：$I = \frac{28}{5}mr^2$，質量 $2m$ 下降了 $\frac{3}{2}r$，所以 $v^2 = r^2 \cdot 3mgr \cdot \frac{10}{28mr^2} = \frac{15}{14}gr$，與公式吻合。

- 我們就幾個不同的 α 值，由釋放位置開始對運動方程作數值積分（RK4）；例如當 $\alpha = 0.7$、$r = 1.3$、$g = 9.81$ 時，模擬結果為 $v^2 = 15.1206$，與公式吻合至六位有效數字。直接搜尋亦確認極大值為 $3\sqrt{10}/8 \approx 1.1859$（以 gr 為單位）。

常見錯誤

- I_C 用了均勻圓盤的數值 $\frac{1}{2}mr^2$；這裏的密度向外遞增，令 I_C 增大至 $\frac{3}{5}mr^2$。
- 在第 (iii) 部分忘記了質點對轉動慣量的貢獻 $m \cdot OP^2$。
- 答了 ω^2 而不是 v^2：題目問的是 C 的速率，即 $r\omega$。

STEP 之外

繞水平軸轉動的剛體（rigid body）就是複擺：它的表現就像一個擺錘位於質心的單擺（simple pendulum），只是慣量由 Md^2 換成 I。在第 (i) 部分的平衡位置附近作小幅振動時，週期為 $2\pi\sqrt{I/(Mgd)}$，其中 $d = OQ$；而「等效單擺」的長度 $I/(Md)$ 則引出了 Kater 的可倒擺（reversible pendulum），這種擺曾用來精確量度 g。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）正是以這種思路處理剛體轉動和平行軸定理。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。