詳細解答

STEP III 1995，第 8 題

純數學 • 平面與球面

> **STEP III 1995，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q8

關鍵思路

平面截球面時，所得的圓的圓心就是由球心向該平面所作垂線的垂足（foot of the perpendicular）。因此，球心必定位於通過每一個圓的圓心的法線（normal）上，而畢氏定理（Pythagoras）則把球心沿每條法線的距離與球的半徑聯繫起來。題目餘下的部分，不過是把這一條向量方程與精心挑選的向量作點積（dot product）而已。

解答

法線與距離

通過 X 而垂直於 π 的法線，就是通過 $\mathbf{x}$ 而方向為 $\mathbf{n}$ 的直線：

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + t\,\mathbf{n}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

它與 π 相交於 $(\mathbf{x}+t\mathbf{n})\cdot\mathbf{n} = p$ 之處，即（因為 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1$）$t = p - \mathbf{x}\cdot\mathbf{n}$ 之處。所以垂足是 $\mathbf{x} + (p - \mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$，而由於 $\mathbf{n}$ 是單位向量（unit vector），X 到 π 的垂直距離為

$$|\mathbf{x}\cdot\mathbf{n} - p|.$$

同時通過兩個圓的球面

假設有一個球心為 $\mathbf{c}$、半徑為 R 的球面包含這兩個圓。固定 i。C_i 上的每一點 $\mathbf{y}$ 都滿足 $|\mathbf{y} - \mathbf{r}_i| = 1$ 及 $(\mathbf{y} - \mathbf{r}_i)\cdot\mathbf{n}_i = 0$；當 $\mathbf{y}$ 繞 C_i 走一圈時，向量 $\mathbf{u} = \mathbf{y} - \mathbf{r}_i$ 會取遍與 $\mathbf{n}_i$ 垂直的每一個單位向量。

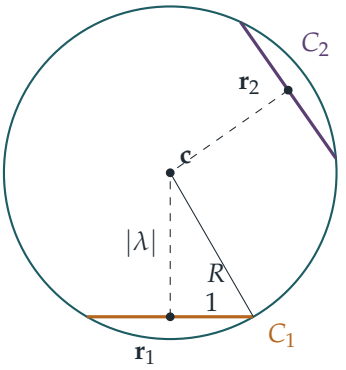
作分解 $\mathbf{c}-\mathbf{r}_i=\mathbf{a}+\mu_i\mathbf{n}_i$，其中 $\mathbf{a}\perp\mathbf{n}_i$。於是

$$\begin{aligned}R^2=|\mathbf{y}-\mathbf{c}|^2&=|\mathbf{u}-\mathbf{a}-\mu_i\mathbf{n}_i|^2\\&=1-2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}+|\mathbf{a}|^2+\mu_i^2,\end{aligned}$$

這裏用到 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}_i=\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}_i=0$。左邊對 C_i 上的每一點都相同，所以 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}$ 對每一個容許的 $\mathbf{u}$ 都取相同的值。但只要 $\mathbf{u}$ 是容許的，$-\mathbf{u}$ 也是容許的，所以對平面上每一個單位向量 $\mathbf{u}$ 都有 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}=-\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}=0$，而取 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{a}$ 平行（假如 $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$）便會得出矛盾。因此 $\mathbf{a}=\mathbf{0}$，並且

$$\mathbf{c}=\mathbf{r}_i+\mu_i\mathbf{n}_i,\qquad R^2=1+\mu_i^2.$$

用文字來說：球心位於通過 C_i 的圓心而垂直於 π_i 的法線上，這正是第一部分所求得的直線。



把以上結果應用於 $i=1$ 和 $i=2$，得 $1+\mu_1^2=R^2=1+\mu_2^2$，所以 $\mu_2=\pm\mu_1$。記 $\lambda=\mu_1$，則

$$\mathbf{r}_1+\lambda\mathbf{n}_1=\mathbf{c}=\mathbf{r}_2\pm\lambda\mathbf{n}_2,$$

所以只要存在合適的球面，這樣的 λ 就必定存在，這正是所要證明的。

兩個必要條件

移項後得

$$\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2=-\lambda\mathbf{n}_1\pm\lambda\mathbf{n}_2.$$

兩邊與 $\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2$ 作點積，而這個向量同時垂直於 $\mathbf{n}_1$ 和 $\mathbf{n}_2$：

$$(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\cdot(\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2)=0.$$

想一想 p_1 從何而來？它並沒有在向量方程中出現。

圓心 $\mathbf{r}_1$ 位於 π_1 上，所以 $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_1 = p_1$；同理 $\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r}_2 = p_2$。記 $k = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2$。把 $\mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{n}_1 = \mathbf{r}_2 \pm \lambda \mathbf{n}_2$ 先與 $\mathbf{n}_1$ 作點積，再與 $\mathbf{n}_2$ 作點積，得

$$p_1 + \lambda = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \pm \lambda k,$$
$$\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r}_1 + \lambda k = p_2 \pm \lambda.$$

所以

$$p_1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \lambda(\pm k - 1), \qquad p_2 - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r}_1 = \lambda(k \mp 1).$$

取上方的符號時，兩式右邊都等於 $\lambda(k-1)$；取下方的符號時，它們分別是 $-\lambda(k+1)$ 和 $\lambda(k+1)$。無論哪一種情況，兩式左邊不是相等就是互為相反數，所以

$$(p_1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_2)^2 = (p_2 - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r}_1)^2.$$

幾何意義

第一個條件。它說明 $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$、$\mathbf{n}_1$ 和 $\mathbf{n}_2$ 共面（coplanar），即純量三重積（scalar triple product）等於零。等價地說，通過 C_1 的圓心而垂直於 π_1 的法線，與通過 C_2 的圓心而垂直於 π_2 的法線，位於同一個平面上：它們不是異面直線（skew lines），所以它們或者相交（交於球心），或者平行。

第二個條件。根據第一部分，$|p_1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_2|$ 是 C_2 的圓心到 π_1 的距離，而 $|p_2 - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r}_1|$ 是 C_1 的圓心到 π_2 的距離。所以這個條件說明這兩個距離相等：每個圓的圓心到另一個圓所在平面的距離，等於另一個圓心到這個圓所在平面的距離。這反映了圖形的對稱性：兩個圓與 $\mathbf{c}$ 的距離同為 $|\lambda|$，所以對某個通過 $\mathbf{c}$ 的合適平面作反射（reflection），便會把兩個圓互換，同時把這兩個距離互換。

驗算

- 取 $\pi_1 : z = 0$ 和 $\pi_2 : z = 2$，兩個單位圓的圓心都在 z 軸上。它們位於球心為 $(0, 0, 1)$、半徑為 $\sqrt{2}$ 的球面上；這時 $\lambda = 1$，取下方的符號，$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{0}$，而第二個條件中的兩個距離都等於 2。
- 在數值方面，我們隨機構造了 5000 個半徑 $R > 1$ 的球面，每個球面配上兩個隨機平面，各截出一個單位圓，並確認了圓上每一點都在球面上，結果發現兩個條件在每一個情況下都成立，誤差不超過 10^{-9}，而且兩種符號都有出現。至於隨機選取、互不相關的兩個圓，則每一次都不滿足第一個條件。

常見錯誤

- 未加論證便假設球心位於通過 $\mathbf{r}_i$ 的法線上；這正是整個證明的核心。

- 遺漏了 $\pm$：球心可以位於兩個平面各自的法向量所指的同一側，也可以位於相反的兩側。
- 忘記了由於 C_1 的圓心位於 π_1 上，所以 $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_1 = p_1$。

STEP 之外

這裏的條件只是必要條件（necessary conditions）：要得到完整的「當且僅當」（if and only if），還需要兩條法線確實相交於一個與兩個圓等距的點。這類題目是踏入二次曲面（quadrics）解析幾何（analytic geometry）的第一步，在那裏，平面、球面以及它們的交集都用線性代數（linear algebra）來處理；純量三重積會以量度體積的 3×3 行列式（determinant）的形式再次出現。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）對這些概念有細緻的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。